МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

С.И. Кузнецов

ФИЗИКА

Часть I
Механика. Механические колебания и волны. Молекулярная физика и термодинамика

Допущено Научно-методическим Советом по физике Министерства образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по техническим направлениям подготовки и специальностям

Издательство
Томского политехнического университета
2012

УДК 53(075.8)
ББК 22.3я73
К89

Кузнецов С.И.

К89 Физика. Ч. I. Механика. Механические колебания и волны. Молекулярная физика и термодинамика: учебное пособие / С.И. Кузнецов; Томский политехнический университет. – 4-е изд. перераб. и доп. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2012. – 245 с.

ISBN 978-5-98298-927-7 (ч. 1)
ISBN 978-5-4387-0044-9

В пособии изложены все разделы курса физической механики, рассмотрены механические колебания и волны, даны разъяснения основных законов и явлений молекулярной физики и термодинамики.

Пособие поможет студентам освоить материал программы, научит активно применять теоретические основы физики как рабочий аппарат, позволяющий решать конкретные задачи, связанные с повышением ресурсоэффективности.

Предназначено для межвузовского использования студентами технических специальностей очной и дистанционной форм обучения.

УДК 53(075.8)
ББК 22.3я73

Рецензенты

Доктор физико-математических наук, профессор
заведующий кафедрой теоретической физики ТГУ
А.В. Шаповалов

Доктор физико-математических наук, профессор
заведующий кафедрой общей информатики ТГПУ
А.Г. Парфенов

ISBN 978-5-98298-927-7 (ч. 1)
ISBN 978-5-4387-0044-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

Все, что видим мы –
Видимость только одна.
Далеко от поверхности мира
До дна!

Омар Хайам

ВВЕДЕНИЕ

Курс физики в высших технических учебных заведениях охватывает все важнейшие разделы классической и современной физики. Выпускник технического университета обязан владеть одной из основных фундаментальных дисциплин – физикой, твердо усвоить принципы и подходы естественных наук, обеспечившие (особенно в последнее время) невиданный технический прогресс и резкое сокращение сроков между научными открытиями и их внедрением в жизнь.

Все это приводит к повышению требований, которые предъявляются к современному курсу физики в вузе. Эти требования находят свое выражение в обновлении материала по сравнению с традиционными курсами, в повышении научно-технического уровня и в использовании инновационных технологий.

Задачей общей физики является, не вдаваясь глубоко в подробности рассматриваемых теорий и не увлекаясь математикой, дать общее представление о физической картине мира, установить действующие в нем законы, изучить основные методы физических исследований и обозначить области применения этих законов и методов.

Цель пособия – помочь студентам освоить материал программы, научиться активно применять теоретические основы физики как рабочий аппарат, позволяющий решать конкретные задачи и приобрести уверенность в самостоятельной работе.

Учебное пособие состоит из трех разделов и представляет систематическое изложение первой части курса общей физики изучаемой в течение трех семестров. Рассмотрены основы классической механики на макроскопическом уровне. Приведены элементы специальной и общей теории относительности, рассмотрена связь пространства–времени с телами, движущимися со скоростями, близкими к скорости света. Рассмотрены основные законы, связанные с механическими колебаниями и распространением волн в упругой среде. Приведены классические формулировки законов молекулярно-кинетической теории вещества. Определены границы классических представлений и рассмотрены основные положения феноменологической термодинамики. Показано, что закономерности и соотношения между физическими величинами, к которым приводит молекулярная физика и термодинамика, имеют универсальный характер.

При этом:

- содержание теоретического материала охватывает все темы первой части курса общей физики: «Физическая механика», «Механические колебания и волны», «Молекулярная физика и термодинамика», изучаемые в технических вузах;
- учитываются наиболее важные достижения в развитии современной науки и техники;
- уделяется большое внимание физике различных явлений природы;
- приводится большое количество рисунков, схем, графиков и гистограмм, способствующих лучшему восприятию прочитанного материала.

Небольшой объем учебного пособия достигнут путем тщательного отбора и лаконичного изложения материала. Ввиду краткости курса устранены излишние разъяснения, повторения и промежуточные выкладки.

Пособие разработано в соответствии с действующей программой курса общей физики и предназначено для студентов, обучающихся по направлениям и специальностям технических наук, техники и технологии. Подготовлено на кафедре общей физики ТПУ и соответствует программе курса физики высших технических учебных заведений.

Предназначено для межвузовского использования студентами технических специальностей, изучающими курс физики по очной и дистанционной программам образования в течение трех семестров.

За помощь в подготовке пособия и целый ряд полезных советов автор благодарен профессорам кафедры общей физики ТПУ: Ю.И. Тюрину, И.П. Чернову, Ю.Ю. Крючкову; доцентам Л.И. Семкиной, Н.Д. Толмачевой. Особая признательность за редактирование пособия профессору В.А. Ларионову.

Наиболее полно материал курса изложен на сайте преподавателя http://portal.tpu.ru/SHARED/s/SMIT, в Web course tools ТПУ, в среде электронного обучения LMS http://lms.tpu.ru/course/view.php?id=8420 и в электронном читальном зале НТБ ТПУ http://www.lib.tpu.ru.

Надеюсь, что книга сможет послужить студентам разных специальностей, действительно интересующихся проблемами точного знания.

Автор с благодарностью примет все замечания и пожелания читателей, способствующие улучшению курса по адресу smit@tpu.ru.

Удачные обозначения обладают утонченностью и будят мысль, порой делая это, кажется, почти так же, как искусный учитель.

Бертран Рассел

ОБОЗНАЧЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Основные физические величины			
Длина	l, м	Сила света	J, кд
Масса	m, кг	Сила электрического тока	I, А
Время	t, с	Количество вещества	ν, моль
Термодинамическая температура	T, К		
Дополнительные физические величины			
Плоский угол	α, φ, рад	Телесный угол	Ω, ср
Производные физические величины			
Гравитационная постоянная	γ, м^{3}кг$^{-1}$с$^{-2}$	Работа	A, Дж
Давление	P, Па	Сила	F, Н
Длина свободного пробега молекул, длина волны	λ, м	Скорость	υ, м·с$^{-1}$
Добротность, количество тепла	Q	Скорость угловая	ω, рад·с$^{-1}$
Импульс	p, кг·м·с$^{-1}$	Скорость центра инерции	υ_c, м·с$^{-1}$
Индекс суммирования, число степеней свободы	i	Теплоемкость при постоянном давлении	C_P, Дж/моль·К
Концентрация молекул	n	Теплоемкость при постоянном давлении	C_V, Дж/моль·К
Коэффициент диффузии	D, м^{2}с$^{-1}$	Угол поворота	φ, рад
Коэффициент жесткости	k, Н·м$^{-1}$	Ускорение	a, м·с$^{-2}$
Коэффициент трения	μ	Ускорение нормальное	a_n, м·с$^{-2}$
КПД цикла	η	Ускорение свободного падения	g, м·с$^{-2}$
Модуль Юнга	E, Па	Ускорение тангенциальное	a_τ, м·с$^{-2}$
Момент импульса	L, кг·м^2·с$^{-1}$	Ускорение угловое	ε, рад·с$^{-2}$
Момент инерции	J, кг·м^2	Частота	ν, Гц
Момент силы	M, Н·м	Частота круговая	ω, с$^{-1}$
Мощность	N, Вт	Энергия внутренняя	U
Напряжение упругое	σ, Па	Энергия кинетическая	$E_к$, Дж
Объем	V, м^3	Энергия покоя	E_0, Дж
Период колебаний	T, с	Энергия полная	E, Дж
Плотность	ρ, кг·м$^{-3}$	Энергия потенциальная	$E_п$, Дж
Площадь, энтропия	S	Энергия удельная	w, Дж·м$^{-3}$

Движенья нет, сказал мудрец брадатый.
Другой смолчал и стал пред ним ходить.

А.С. Пушкин

1. МЕХАНИКА

1.1. Предмет физики и ее связь с другими науками

1.1.1. Предмет физики

Физика – наука, изучающая простейшие и вместе с тем наиболее общие закономерности явлений природы, свойства и строение материи и законы ее движения.

Главная цель любой науки, в т. ч. и ***физики***, рассматривается обычно как приведение в систему представлений о сложных явлениях, регистрируемых нашими органами чувств, т. е. упорядочение того, что мы называем «*окружающим нас миром*».

Окружающий нас мир, все существующее вокруг нас и обнаруживаемое нами посредством ощущений представляет собой материю. ***Материя – это объективная реальность, данная нам в ощущениях.***

Неотъемлемым свойством материи и формой ее существования является ***движение*** – это в широком смысле слова всевозможные изменения материи – от простого перемещения до сложнейших процессов *мышления.*

В настоящее время общепринято, что все взаимодействия осуществляются посредством ***полей*** (например, гравитационных, электромагнитных, полей ядерных сил).

Поле*, наряду с веществом, является одной из форм существования материи.* Неразрывная связь поля и вещества, а также различие в их свойствах будут рассмотрены нами по мере изучения курса физики.

1.1.2. Теория и эксперимент в физике

В курсе физики часто используются понятия: ***эксперимент, гипотеза, теория, модель, закон***.

Каждая наука определяется не только предметом изучения, но и специфическими методами, которые она применяет. Основным методом исследования в физике является ***опыт*** *– наблюдение исследуемых явлений в точно учитываемых условиях, позволяющих следить за ходом явлений, многократно воспроизводить его при повторении этих условий.*

Наиболее широко в науке используется ***индуктивный метод****, заключающийся в накоплении* ***фактов*** *и последующем их обобщении для выявления общей закономерности –* ***гипотезы***. На следующем этапе познания ставят специальные эксперименты для проверки гипотезы. Если результаты эксперимента не противоречат гипотезе, то последняя получает статус ***теории***.

Весьма важным в любой теории является то, насколько точно она позволяет получить количественные данные. Например, теория относительности Эйнштейна почти во всех обыденных ситуациях дает предсказания, которые крайне слабо отличаются от предшествующих теорий Галилея и Ньютона, но она приводит к *более точным результатам в предельном случае высоких скоростей*, близких к скорости света.

Под влиянием специальной теории относительности (СТО) Эйнштейна существенно изменилось наше представление о пространстве и времени. Более того, мы пришли к пониманию взаимосвязи массы и энергии (на основе знаменитого соотношения $E = mc^2$). Таким образом, теория относительности резко изменила наши взгляды на природу физического мира.

Пытаясь понять и объяснить определенный класс явлений, ученые часто прибегают к использованию ***модели***. При этом под ***моделью*** *понимают некоторый мысленный образ явления, опирающийся на уже известные понятия и позволяющий построить полезную аналогию.*

Примером может служить волновая модель света. Световые волны нельзя наблюдать подобно тому, как мы видим волны на воде, однако результаты опытов со светом указывают на его большое сходство с волнами на воде. Другой пример – модель атома, которую много раз строили и усовершенствовали.

Модельное представление всегда строится на основе какого-либо закона. ***Законом*** *называют некоторые краткие, но достаточно общие утверждения относительно характера явлений природы* (*таково, например, утверждение о сохранении импульса*). Иногда подобные утверждения принимают форму определенных соотношений между величинами, описывающими явления, например *закон всемирного тяготения* Ньютона, согласно которому

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Для того чтобы называться законом, утверждение должно выдержать экспериментальную проверку *в широком классе наблюдаемых явлений*, т. е. закон представляет объединяющее начало для многих наблюдений. Это ведущий принцип, который высвечивает закономерности явлений природы.

Таков путь развития знания. Однако известны случаи, когда путь открытия был противоположным описанному. Это так называемый ***дедуктивный метод***, *когда на основе общих закономерностей выделяются частные явления*. Так, на основе закона всемирного тяготения в 1848 г. была открыта планета Нептун, а в 1930 г. – Плутон.

1.1.3. Физика и другие науки

Ричард Фейнман, читая свои лекции по физике, говорил: «*Физика – это самая фундаментальная из всех наук, самая всеобъемлющая; огромным было ее влияние на все развитие науки. Действительно, ведь нынешняя физика вполне равноценна давнишней натуральной философии, из которой возникло большинство современных наук. Не зря физику вынуждены изучать студенты всевозможных специальностей; во множестве явлений она играет основную роль*».

Химия (***неорганическая***) испытывает на себе влияние физики более, чем любая другая наука. Все химические процессы – это образование или разрушение связи между валентными электронами. В сущности, теоретическая химия – это физика.

Астрономия – старше физики. Но как наука астрономия встала на ноги только тогда, когда физики смогли объяснить, почему планеты и звезды движутся именно так, а не иначе. Самым поразительным открытием астрономии был тот факт, что звезды состоят из тех же атомов, что и Земля. Доказано это было физиками-спектроскопистами. Откуда звезды черпают свою энергию? Ясно это стало только к 1940 г., после открытия физиками реакции деления и термоядерного синтеза. Астрономия столь близка к физике, что трудно провести грань между ними.

Биология. Механизм всех биологических процессов можно понять только на молекулярном и внутриклеточном уровне. И здесь биологам не обойтись без знания физики и без физической аппаратуры, например электронных микроскопов, с помощью которых была открыта структура ДНК. А сложнейшие процессы нервной деятельности? По сути – это электромагнитные явления.

Здесь взяты примеры из областей науки, казалось бы, далеких от физики. А все предметы, которые изучаются в техническом университете (кроме истории, иностранных языков и т. д.), являются частными случаями различных разделов физики.

Например, ***электротехника*** началась с чисто физических исследований Эрстеда, Ампера, Фарадея, Максвелла. ***Электроника*** – это синтез нескольких разделов физики: электромагнетизма, физики твердого тела, физики вакуума и газов и т. д. И даже царица наук – ***математика*** – является инструментом для физических исследований. ***Лазеры*** – физика вынужденного излучения атомов и молекул. ***Голография*** – техническое использование явления интерференции и дифракции электромагнитных волн.

Связь между ***физикой*** и ***горно-геологическими науками*** неоспорима. Нельзя объяснить никакой геологический процесс, не опираясь на физические законы, описывающие элементарные составляющие этого процесса. Для иллюстрации перечислим часть из большого числа глобальных проблем геологии, теснейшим образом связанных с физикой:

- происхождение Земли и других планет;
- строение и состав различных геосфер;
- возраст Земли и датирование этапов ее развития;
- термическая история Земли;
- разработка теории разрушения горных пород;
- прогноз геодинамических процессов (землетрясения, горные удары, внезапные выбросы газов и др.).

В результате связи физики и геологии обособились граничные области знаний: геофизика, петрофизика, физика земной коры, физика атмосферы, физика пласта, физика океанов и др.

Есть надежда, что таким коротким экскурсом в проблемы связи физики с другими науками авторам удалось поколебать бытующее среди студентов мнение, что физика им совершенно ни к чему.

1.1.4. Пространственно-временные отношения

Механика *– наука о простом перемещении тел в пространстве и во времени.* Согласно основным положениям материалистического учения окружающий нас мир состоит из различных видов материи, которая движется в пространстве и изменяется с течением времени. Другими словами, пространство и время есть формы существования материи, неотделимые от самой материи.

Движение, понимаемое в широком смысле, является неотъемлемым всеобщим свойством материи. Простейшей формой движения является механическое движение или перемещение.

Основными понятиями классической механики являются *абсолютное пространство* и *абсолютное время*.

Основными свойствами абсолютного пространства являются однородность и изотропность, т. е. все точки абсолютного пространства и все направления в нем равноценны. Абсолютное время по определению протекает равномерно, не зависит от свойств материи и места в пространстве. Оно однородно, но не изотропно, т. е. его мгновения равноценны, но из двух мгновений одно было раньше другого.

Пространство – это форма сосуществования материальных объектов и процессов, характеризующих структурность и протяженность материальных систем.

Время – это форма последовательной смены явлений и состояний материи, которая характеризует длительность их бытия. Пространство и время не существуют в отрыве от материи.

Масштабы пространства, времени и скоростей перемещения могут изменяться в очень широких пределах (рис. 1.1.1).

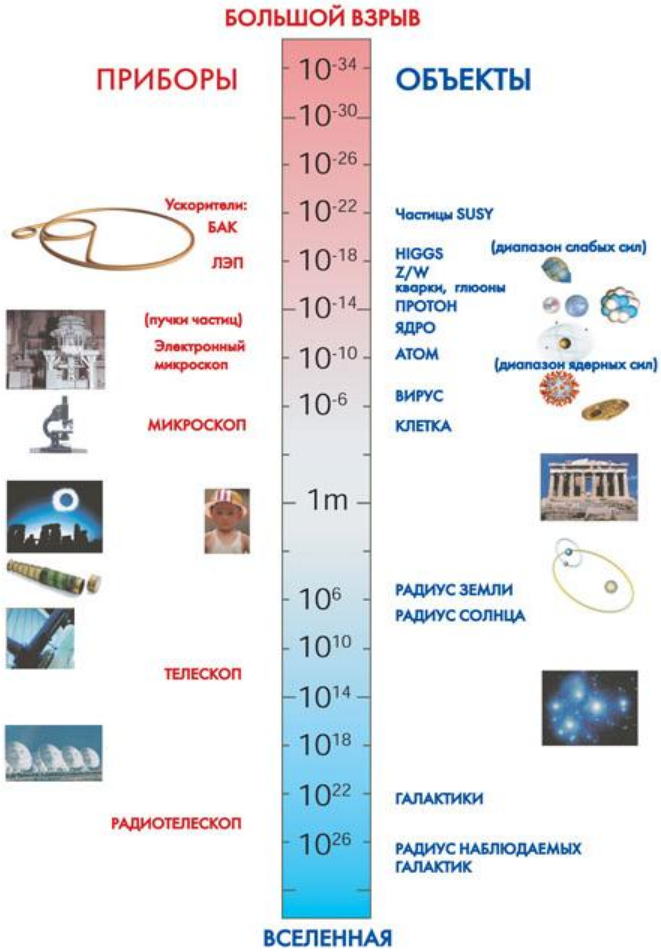


Рис. 1.1. Пределы изменения пространства

***Масштабы пространства*:**

- пространство Вселенной, доступное для наблюдения посредством современных методов, достигает 10^{26} м;
- размеры ядер имеют порядок 10^{-15} м;
- на мощных ускорителях исследуется структура частиц до расстояний 10^{-18} м.

***Масштабы времени*:**

- время существования Вселенной оценивается в 10^{18} с;
- современные методы дают возможность измерять время жизни нестабильных частиц до 10^{-11} с.

***Скорость*:**

- естественным масштабом скоростей в природе служит скорость распространения электромагнитных волн в вакууме $c = 2{,}998 \cdot 10^{8}$ м·с$^{-1}$.

Скорость света в вакууме является предельно высокой скоростью любого материального объекта. Ее называют универсальной (мировой) постоянной.

Если скорость движения объекта пренебрежимо мала по сравнению со скоростью света так, что $(\upsilon / c)^2 << 1$, то движение является *нерелятивистским.* В противном случае – *релятивистское.*

Законы движения существенно отличаются в зависимости от *пространственных масштабов* (макромир и микромир). Линейный размер атомов равен 10^{-10} м. Этот размер является одним из признаков перехода от макромира к микромиру. Он получил название ***Ангстрем*** (1 Å = 10^{-10} м).

Критерием применимости законов макро- или микромира является универсальная константа – ***постоянная*** Планка:

$$\hbar = h/2\pi = 1{,}054 \cdot 10^{-34}\,\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$$

Движение макроскопических тел подчиняется законам классической механики – именно с этого раздела мы начнем с вами изучать физику. Движение микрочастиц подчиняется законам квантовой механики, качественно отличающимся от классических.

Другими словами, движение описывается классическими законами, если произведение массы тела m на скорость υ и на расстояние R значительно больше постоянной Планка:

$$m\upsilon R >> \hbar\,.$$

Обобщая вышесказанное, следует отметить, что механика подразделяется на классическую и квантовую и в пределах каждой из них рассматривают релятивистское и нерелятивистское движение.

Квантовые и релятивистские представления имеют более общий характер, и законы классической и нерелятивистской механики вытекают из квантовых и релятивистских представлений при переходе соответствующих границ.

1.2. Кинематика материальной точки

Приводятся абстрактные понятия, отражающие реальные свойства тел. Описываются важнейшие системы координат. Излагаются сведения о векторах. Дается определение основных физических величин кинематики точки.

1.2.1. Понятие механики. Модели в механике

Механика (от греч. *mechanike – орудие, сооружение*) *– раздел физики, который изучает закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение.*

Механическое движение *– это изменение с течением времени взаимного расположения тел или их частей.*

Механика подразделяется: на *статику, кинематику и динамику*.

Кинематика (от греч. kinema – *движение*) – *раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их массы и действующих на них сил.*

Динамика (от греч. dynamis – *сила*) *изучает движения тел в связи с теми причинами, которые обусловливают это движение*.

Статика (от греч. statike – *равновесие*) *изучает условия равновесия тел. Поскольку равновесие есть частный случай движения, законы статики являются естественным следствием законов динамики и в данном курсе не изучаются.*

Механика Галилея и Ньютона называется ***классической****, т. к. она рассматривает движение макроскопических тел со скоростями, значительно меньшими, чем скорость света в вакууме*. Движение тел со скоростями, близкими к скорости света, рассматривает ***релятивистская механика***, другое ее название – ***специальная теория относительности***. Рассмотрением движения элементарных частиц занимается ***квантовая механика***.

Для описания движения тел в зависимости от условий задачи используют различные *физические модели*. Чаще других используют понятия *абсолютно твердого тела* и *материальной точки.*

Движение тел происходит под действием сил. Под действием внешних сил тела могут деформироваться, т. е. изменять свои размеры и форму.

Тело, деформацией которого можно пренебречь в условиях данной задачи, называют ***абсолютно твердым телом*** (*хотя абсолютно твердых тел в природе не существует*).

Тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь, называется ***материальной точкой***.

Можно ли данное тело рассматривать как материальную точку или нет, зависит не от размеров тела, а от условия задачи (например, наше огромное Солнце – тоже материальная точка в Солнечной системе).

1.2.2. Система отсчета, тело отсчета. Сведения о векторах

Всякое движение *относительно*, поэтому для описания движения необходимо условиться, относительно какого другого тела будет отсчитываться перемещение данного тела. *Выбранное для этой цели тело называют* ***телом отсчета***.

Система отсчета – *совокупность системы координат и часов, связанных с телом, относительно которого изучается движение.*

Движение тела, как и материи вообще, не может быть вне времени и пространства. Материя, пространство и время неразрывно связаны между собой (нет пространства без материи и времени, и наоборот).

Для описания движения практически приходится связывать с телом отсчета ***систему координат*** [*декартова* (рис. 1.2.1), *сферическая* (рис. 1.2.2), *цилиндрическая* и др.].

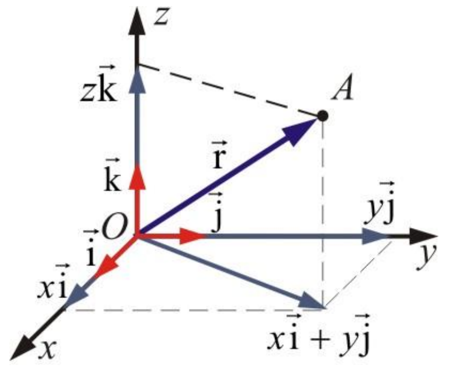


Рис. 1.2.1. Декартова система координат: положение точки A характеризуется координатами x, y, z или радиус – вектором $\vec{r}$

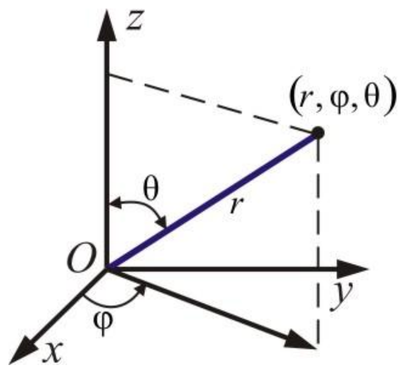


Рис. 1.2.2. Сферическая система координат: положение точки характеризуется длиной r, углами θ и φ

В декартовой системе координат положение точки *A* в данный момент времени по отношению к этой системе характеризуется тремя координатами *x*, *y*, *z* или радиус-вектором $\vec{r}$, проведенным из начала координат в данную точку.

Преобразования от сферических к декартовым координатам:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta.$$

Пространство трехмерно, поэтому «естественной» системой координат является декартова, или прямоугольная, система координат, которой мы в основном и будем пользоваться.

Сведения о векторах

Векторными *называются величины, характеризующиеся не только численным значением* (модулем), *но и направлением* (в тексте векторы обозначают буквами прямого шрифта со стрелкой сверху, например $\vec{r}$).

На чертежах векторы, направленные к нам, обозначают точкой $(\cdot)$, а от нас – крестиком $(\times)$.

Радиус-вектором $\vec{r}$ *некоторой точки A называется вектор, проведенный из выбранного начала координат в данную точку* (рис. 1.2.1). Его проекции на координатные оси равны декартовым координатам данной точки: *x*, *y*, *z*. Умножив их на единичные векторы (орты) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, вектор $\vec{r}$ можно представить в виде:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{1.2.1}$$

Слагаемые $x\vec{i}, y\vec{j}, z\vec{k}$ называются *компонентами*, или *составляющими*, вектора $\vec{r}$; числа *x, y, z* – его координатами, а само соотношение (1.2.1) – формулой разложения вектора $\vec{r}$ по единичным ортам.

Модуль радиус-вектора, можно выразить через координаты вектора $\vec{r}$, используя теорему Пифагора:

$$\left|\vec{r}\right| \equiv r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,. \tag{1.2.2}$$

Сложение векторов осуществляется по следующей схеме: начало каждого последующего вектора совмещают с концом предыдущего, результирующий вектор проводится из начала первого в конец последнего. Эта операция называется *правилом многоугольника*.

Умножение векторов производится на скалярную или векторную величину. Перемножение векторов может быть *скалярным* или *векторным*.

Скалярное произведение двух векторов $\vec{d}$ и $\vec{b}$ дает скалярную величину *c* и вычисляется по формуле

$$c = \vec{d}\cdot\vec{b} \equiv \vec{d}\,\vec{b} \equiv \left(\vec{d},\vec{b}\right) = \left|\vec{d}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha\,, \tag{1.2.3}$$

где $\left|\vec{d}\right|$ и $\left|\vec{b}\right|$ – модули перемножаемых векторов, α – угол между ними. При этом произведение $d\cdot\cos\varphi$ называется проекцией вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{b}$. Очевидно, что скалярное произведение векторов не зависит от того, в каком порядке они расположены: $\vec{d}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{d}$.

В частном случае, когда $\vec{d} = \vec{b}$, формула (1.2.3) дает $\left(\vec{b},\vec{b}\right) \equiv \vec{b}^2 = b^2$. Если векторы $\vec{d}$ и $\vec{b}$ ортогональны друг другу, то их скалярное произведение согласно (1.2.3) равно нулю:

$$\vec{d}\cdot\vec{b} = 0 \text{ при } \vec{d}\perp\vec{b}.$$

Векторным произведением векторов $\vec{d}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, определяемый формулой

$$\vec{c} = \vec{d}\cdot\vec{b} \equiv \left[\vec{d}\,\vec{b}\right] = \left(\left|\vec{d}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\alpha\right)\cdot\vec{n}\,, \tag{1.2.4}$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор, направленный перпендикулярно к плоскости, в которой лежат векторы-сомножители. Направление вектора $\vec{n}$, а также результирующего вектора $\vec{c}$ можно найти по *правилу правого винта* или по «*правилу буравчика*».

Модуль векторного произведения равен произведению модулей $\vec{d}$ и $\vec{b}$, умноженному на синус угла между ними:

$$\left|[\vec{d}\vec{b}]\right| = db\sin\alpha. \tag{1.2.5}$$

Вектор $\left[\vec{d}\vec{b}\right]$ равен по модулю вектору $\left[\vec{b}\vec{d}\right]$ и направлен в противоположную сторону:

$$\left[\vec{b}\vec{d}\right] = -\left[\vec{d}\vec{b}\right]. \tag{1.2.6}$$

Векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю:

$$\left[\vec{d}\vec{b}\right] = 0, \text{ если } \vec{d}\parallel\vec{b}. \tag{1.2.7}$$

1.2.3. Кинематика материальной точки. Путь, перемещение

Итак, положение точки *A* в пространстве задается с помощью радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного из точки отсчета *O*, или начала координат (рис. 1.2.1). При движении материальной точки ее координаты с течением времени изменяются.

В общем случае ее движение определяется *скалярными уравнениями:*

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t). \tag{1.2.8}$$

В соответствии с (2.2.4) эти уравнения эквивалентны *векторному уравнению*

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \tag{1.2.9}$$

Уравнения (1.2.8) и (1.2.9) называются ***кинематическими уравнениями движения материальной точки.***

Число независимых координат, полностью определяющих положение точки в пространстве, называется ***числом степеней свободы.***

Если материальная точка движется в пространстве, то она имеет три степени свободы (координаты *x*, *y*, *z*); если она движется на плоскости – две степени свободы; если вдоль линии – одну степень свободы.

При движении материальной точки *A* из положения *1* в положение *2* (рис. 1.2.3) ее радиус-вектор изменяется и по величине, и по направлению, т. е. $\vec{r}$ зависит от времени *t*.

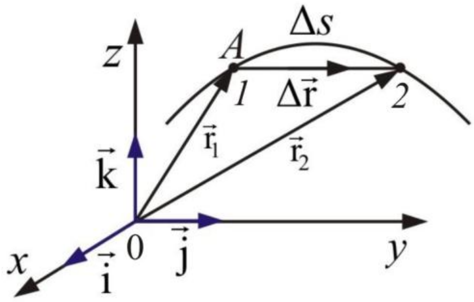


Рис. 1.2.3. Перемещение точки A в пространстве из положения 1 в положение 2: вектор перемещения $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

Геометрическое место точек концов $\vec{r}$ *называется* ***траекторией точки***. *Длина траектории* есть ***путь*** Δs. Если точка движется по прямой, то приращение $|\Delta\vec{r}|$ равно пути Δs.

Пусть за время Δt точка *A* переместилась из точки *1* в точку *2*. ***Вектор перемещения*** $\Delta\vec{r}$ есть приращение $\vec{r}_1$ за время Δt:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k},$$

или

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}; \quad (1.2.10)$$

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}. \quad (1.2.11)$$

Скорость

Средний вектор скорости определяется как отношение вектора перемещения $\Delta\vec{r}$ ко времени Δt, за которое это перемещение произошло:

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = <\vec{\upsilon}>. \quad (1.2.12)$$

Вектор $<\vec{\upsilon}>$ совпадает с направлением вектора $\Delta\vec{r}$ (рис. 1.2.4).

Средняя путевая скорость $<\upsilon> = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$.

Мгновенная скорость материальной точки

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Мгновенная скорость $\vec{\upsilon}$ *– вектор скорости в данный момент времени, равный первой производной от* $\vec{r}$ *по времени и направлен по касательной к траектории в данной точке в сторону движения точки A.* Модуль вектора скорости

$$\upsilon \equiv |\vec{\upsilon}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|. \quad (1.2.13)$$

При $dt \to 0$, т. е. на бесконечно малом участке траектории, $ds = dr$ (перемещение совпадает с траекторией). В этом случае *мгновенную скорость можно выразить через скалярную величину – путь*:

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

Обратное действие – интегрирование (рис. 1.2.5).

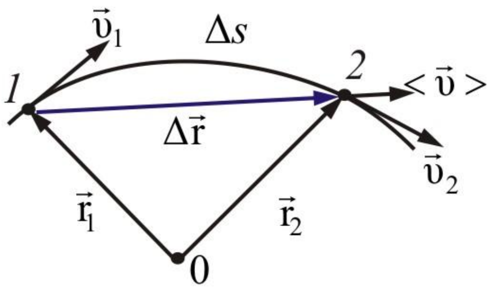


Рис. 1.2.4. Перемещение точки А в пространстве из положения 1 в 2

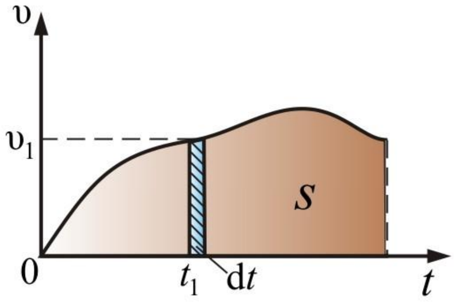


Рис. 1.2.5. Площадь под кривой υ(t) есть путь, пройденный телом

$\mathrm{d}s = \upsilon\mathrm{d}t$ – площадь бесконечно узкого прямоугольника. Чтобы вычислить весь путь *s* за время *t*, надо сложить площади всех прямоугольников. В пределе перейдем к определенному интегралу:

$$s = \int_0^t \upsilon \mathrm{d}t.$$

Геометрический смысл этого интеграла в том, что площадь под кривой $\upsilon(t)$ *есть путь тела за время t.*

При равномерном движении (с постоянной скоростью) $s = \upsilon t$.

Принцип независимости движения (принцип суперпозиции)

Если материальная точка участвует в нескольких движениях, то ее *результирующее перемещение* $\mathrm{d}\vec{r}$ *равно векторной сумме перемещений*, обусловленных каждым из этих движений в отдельности.

В общем случае

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\vec{r}_1 + \mathrm{d}\vec{r}_2 + \ldots + \mathrm{d}\vec{r}_i + \mathrm{d}\vec{r}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}\vec{r}_i,$$

но т. к. $\vec{\upsilon} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$, то $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2 + \ldots + \vec{\upsilon}_i + \vec{\upsilon}_n$, или $\vec{\upsilon} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\upsilon}_i$.

Таким образом, *скорость тоже подчиняется принципу независимости движения.*

В физике существует общий принцип, который называется ***принципом суперпозиции*** (***принцип наложения***) – *допущение, согласно которому результирующий эффект сложного процесса взаимодействия представляет собой сумму эффектов, вызываемых каждым воздействием в отдельности при условии, что последние взаимно не влияют друг на друга.*

Проекция вектора скорости на оси координат

Но для практических вычислений нужно знать проекции вектора на оси координат выбранной системы отсчета. Положение точки *A* (рис. 1.2.6) задается радиус-вектором $\vec{r}$. Спроецируем вектор $\vec{r}$ на оси *x*, *y*, *z*.

Проекции вектора скорости $\vec{\upsilon}$ на оси *x*, *y*, *z* в обозначениях Лейбница:

$$\upsilon_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t};\ \upsilon_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t};\ \upsilon_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}.$$

Эти три равенства эквивалентны векторному равенству $\vec{\upsilon} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$.

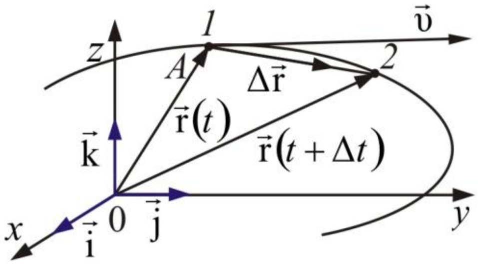


Рис. 1.2.6. Вектор перемещения точки A и ее скорость $\vec{\upsilon}$

Согласно общей формуле (1.2.5) *модуль вектора скорости*

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}. \tag{1.2.14}$$

Так как скорость – величина векторная, то ее можно представить с помощью единичных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} + \upsilon_z\vec{k} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k}.$$

1.2.4. Ускорение и его составляющие

В произвольном случае движения скорость не остается постоянной. *Быстрота изменения скорости по времени и направлению характеризуется* ***ускорением***

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}. \tag{1.2.15}$$

Ускорение – величина векторная. При криволинейном движении $\vec{\upsilon}$ изменяется также и по направлению. Введем *единичный вектор* $\vec{\tau}$ (рис. 1.2.7), связанный с точкой *A* и направленный по касательной к траектории движения точки *A* (векторы $\vec{\tau}$ и $\vec{\upsilon}$ в точке *A* совпадают). Тогда можно записать:

$$\vec{\upsilon} = \upsilon\vec{\tau},$$

где $\upsilon = |\vec{\upsilon}|$ – модуль вектора скорости.

Найдем ускорение:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{dt}\vec{\tau} + \upsilon\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \tag{1.2.16}$$

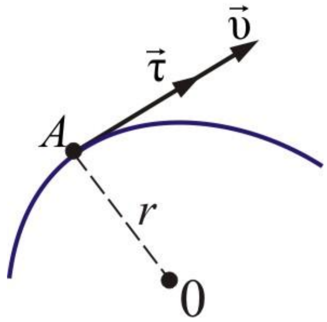


Рис. 1.2.7. К выводу тангенциальной составляющей ускорения: единичный вектор $\vec{\tau}$ направлен по касательной к траектории

Получаем два слагаемых ускорения: $\vec{a}_\tau$ – ***тангенциальное ускорение***, совпадающее с направлением $\vec{\upsilon}$ в данной точке, $\vec{a}_n$ – ***нормальное ускорение*** или ***центростремительное***, т. к. направлено оно к центру кривизны, перпендикулярно вектору $\vec{\tau}$:

$$\vec{a}_\tau = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}, \text{ или, по модулю, } a_\tau = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}, \tag{1.2.17}$$

где $\mathrm{d}\upsilon/\mathrm{d}t$ – скорость изменения модуля вектора скорости $\vec{\upsilon}$.

Итак, $\vec{a}_\tau$ показывает изменение вектора скорости по величине:

- если $\mathrm{d}\upsilon/\mathrm{d}t > 0$, то $\vec{a}_\tau$ направлено в ту же сторону, что и вектор $\vec{\upsilon}$, т. е. ускоренное движение;
- если $\mathrm{d}\upsilon/\mathrm{d}t < 0$, то $\vec{a}_\tau$ направлено в противоположную сторону $\vec{\upsilon}$, т. е. замедленное движение;
- при $\mathrm{d}\upsilon/\mathrm{d}t = 0$ $\vec{a}_\tau = 0$, $\vec{\upsilon} = \mathrm{const}$ – движение с постоянной по модулю скоростью.

Рассмотрим подробнее второе слагаемое уравнения (1.2.16):

$$\vec{a}_n = \upsilon\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}.$$

Нормальное ускорение *показывает быстроту изменения направления вектора скорости.*

$$\vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{r}\vec{\mathrm{n}}. \tag{1.2.18}$$

Модуль нормального ускорения $|\vec{a}_n| \equiv \vec{a}_n = \upsilon^2/r$.

Итак, возвращаясь к выражению (1.2.16), можно записать, что *суммарный вектор ускорения* при движении точки вдоль плоской кривой равен:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} + \frac{\upsilon^2}{r}\vec{\mathrm{n}}.$$

На рис. 1.2.8 изображено взаимное расположение векторов ускорения.

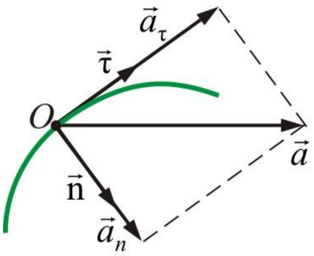


Рис. 1.2.8. Суммарное ускорение и его нормальная и тангенциальная составляющие

Как видно из этого рисунка, модуль общего ускорения равен:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}\,. \tag{1.2.19}$$

Рассмотрим несколько предельных (частных) случаев:

- $a_\tau = 0$; $a_n = 0$ – равномерное прямолинейное движение;
- $a_\tau = \mathrm{const}$; $a_n = 0$ – равноускоренное прямолинейное движение;
- $a_\tau = 0$; $a_n = \mathrm{const}$ – равномерное движение по окружности.

Прямая задача кинематики *сводится к определению кинематических характеристик по известному закону движения.*

При движении с постоянным ускорением (a = const)

$$s = \int at\mathrm{d}t = a\int t\mathrm{d}t = at^2/2.$$

Если $\upsilon = \upsilon_0 \pm at$ (a = const), то

$$s = s_0 + \upsilon_0 t \pm at^2/2. \tag{1.2.20}$$

Обратная задача кинематики *заключается в нахождении закона движения по известной скорости* (*ускорению*) *и начальному кинематическому состоянию.*

Пусть известно ускорение точки в каждый момент времени.

По определению имеем $a(t) = \dfrac{\mathrm{d}\upsilon(t)}{\mathrm{d}t}$, отсюда $\upsilon(t) = \upsilon(t_0) \pm \int\limits_{t_1}^{t_2} a(t)\mathrm{d}t$,

т. к. $\upsilon(t) = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$, следовательно, $r(t) = r(t_0) + \int\limits_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)\mathrm{d}t$.

1.2.5. Кинематика твердого тела. Виды движения

Различают пять видов движения:

- *поступательное;*
- *вращательное (вокруг неподвижной оси);*
- *плоское;*
- *вокруг неподвижной точки;*
- *свободное.*

Поступательное движение *и вращательное* движение вокруг оси – основные виды движения твердого тела. Остальные виды движения твердого тела можно свести к одному из этих основных видов или к их совокупности.

Поступательное *– это такое движение, при котором любая прямая, связанная с движущимся телом, остается параллельной самой себе и все точки твердого тела совершают равные перемещения за одинаковое время* (рис. 1.2.9).

При ***вращательном движении*** вокруг оси все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой *осью OO' вращения* (рис. 1.2.10).

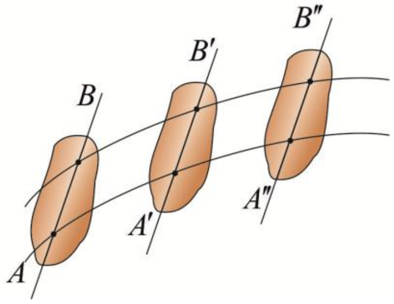


Рис. 1.2.9. Поступательное движение тела

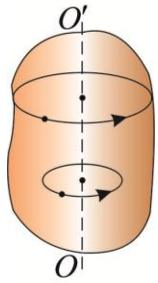


Рис. 1.2.10. Вращательное движение тела

Из определения вращательного движения ясно, что понятие вращательного движения для материальной точки неприемлемо.

Вращательное движение вокруг неподвижной оси

Движение твердого тела, при котором две его точки O и O' остаются неподвижными, называется ***вращательным движением вокруг неподвижной оси****, а неподвижную прямую OO' называют* ***осью вращения****.*

Пусть абсолютно твердое тело вращается вокруг неподвижной оси *OO'* (рис. 1.2.11).

Угол поворота $d\varphi$ характеризует *перемещение всего тела за время* dt.

Удобно ввести $d\vec{\varphi}$ – вектор элементарного поворота тела, численно равный $d\varphi$ и направленный вдоль оси вращения *OO'* так, чтобы, глядя вдоль вектора, мы видели вращение по часовой стрелке (направление вектора $d\vec{\varphi}$ и направление вращения связаны «правилом буравчика»).

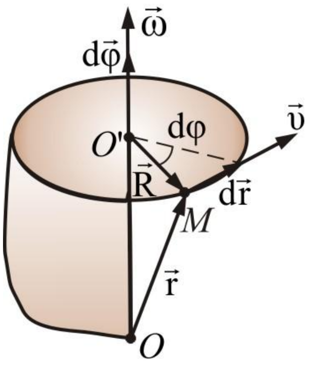


Рис. 1.2.11. Вращательное движение твердого тела вокруг оси OO′

Элементарные повороты удовлетворяют обычному правилу сложения векторов:

$$d\vec{\varphi} = d\vec{\varphi}_1 + d\vec{\varphi}_2.$$

Угловой скоростью *называется вектор* $\vec{\omega}$, *численно равный первой производной от угла поворота по времени и направленный вдоль оси вращения в направлении* $d\vec{\varphi}$ ($\vec{\omega}$ и $d\vec{\varphi}$ всегда направлены в одну сторону):

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \qquad (1.2.21)$$

Если ω – const, то имеет место *равномерное вращение тела вокруг неподвижной оси.*

Пусть $\vec{\upsilon}$ – линейная скорость точки *M*. За промежуток времени dt точка *M* проходит путь $dr = \upsilon dt$. В то же время $dr = R d\varphi$ (центральный угол). Тогда можно получить связь линейной скорости и угловой:

$$\upsilon = \frac{dr}{dt} = \frac{R d\varphi}{dt} = \omega R, \text{ или } \vec{\upsilon} = [\vec{\omega}, \vec{R}]. \qquad (1.2.22)$$

Вектор $\vec{\upsilon}$ ортогонален к векторам $\vec{\omega}$ и $\vec{R}$ и направлен в ту же сторону, что и векторное произведение $[\vec{\omega}, \vec{R}]$.

Период вращения *T – промежуток времени, в течение которого тело совершает полный оборот* (т. е. поворот на угол $\varphi = 2\pi$).

Частота ν – *число оборотов тела за одну секунду.*

При вращении с угловой скоростью ω имеем:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu;\ T = \frac{2\pi}{\omega};\ \nu = \frac{1}{T}.$$

Введем вектор ***углового ускорения*** $\vec{\varepsilon}$ для характеристики *неравномерного вращения тела*:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}. \tag{1.2.23}$$

Вектор $\vec{\varepsilon}_+$ направлен в ту же сторону, что и $\vec{\omega}$ при ускоренном вращении $\left(\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t > 0\right)$, а $\vec{\varepsilon}_-$ направлен в противоположную сторону при замедленном вращении $\left(\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t < 0\right)$, рис. 1.2.12.

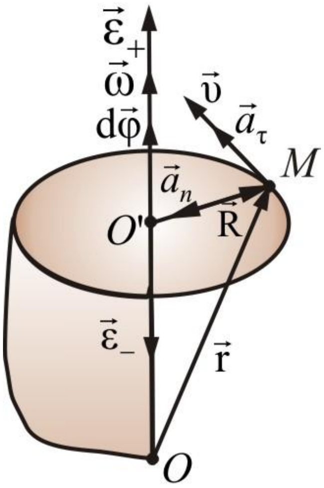


Рис. 1.2.12. Вращение твердого тела с угловым ускорением ε

Как и любая точка твердого тела, точка M имеет нормальную и тангенциальную составляющие ускорения. Выразим нормальное и тангенциальное ускорение точки M через угловую скорость и угловое ускорение:

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega R) = R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = R\varepsilon;$$

$$a_\tau = R\varepsilon; \tag{1.2.24}$$

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R. \tag{1.2.25}$$

Все кинематические параметры, характеризующие вращательное движение (угловое ускорение, угловая скорость и угол поворота), ***направлены вдоль оси вращения****.*

Формулы простейших случаев вращения тела вокруг неподвижной оси:

- *равномерное вращение* $\varepsilon = 0$; $\omega = \mathrm{const}$, $\varphi = \varphi_0 \pm \omega t$;
- *равнопеременное вращение* $\varepsilon = \mathrm{const}$; $\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$; $\varphi = \omega_0 t \pm \varepsilon t^2/2$.

Контрольные вопросы. Упражнения

1. На какие части подразделяется механика?
2. Что такое система отсчета? Тело отсчета?
3. Что такое вектор перемещения? Всегда ли модуль вектора перемещения равен отрезку пути, пройденному точкой?
4. Что называется материальной точкой? Почему в механике вводят такую модель?
5. Какое движение называется поступательным? Вращательным?
6. Дайте определения векторов средней скорости и среднего ускорения, мгновенной скорости и мгновенного ускорения. Каковы их направления?
7. Что характеризует тангенциальная составляющая ускорения? нормальная составляющая ускорения? Каковы их модули?
8. Возможны ли движения, при которых отсутствует нормальное ускорение, тангенциальное ускорение? Приведите примеры.
9. Дайте понятие кривизны траектории и радиуса кривизны.
10. В чем заключается обратная задача кинематики?
11. Перечислите пять видов движения твердого тела.
12. Что называется углом поворота? Что он характеризует?
13. Что называется угловой скоростью, угловым ускорением? Как определяются их направления?
14. Какова связь между линейными и угловыми кинематическими параметрами?
15. Что такое период и частота вращения?
16. Как направлены кинематические параметры, характеризующие вращательное движение?
17. Приведите формулы простейших случаев вращения тела вокруг неподвижной оси.
18. Изобразите твердое тело, вращающиеся вокруг своей оси, и укажите его кинематические параметры.
19. По приведенному графику $a_x(t)$ (рис. 1) постройте графики $\upsilon_x(t)$, $x(t)$, и $s(t)$ при следующих начальных условиях: $\upsilon(0) = 0$, $x(0) = 0$.

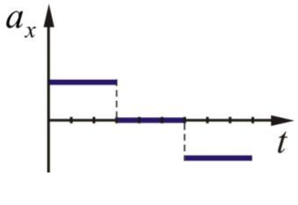


Рис. 1

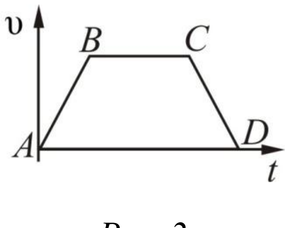


Рис. 2

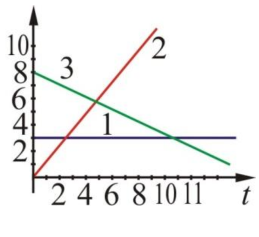


Рис. 3

20. Используя график (рис. 2) зависимости скорости тела от времени, определите, каким видам движения соответствуют участки 1–2, 2–3, 3–4.

21. Пользуясь приведенными на рис. 3 графиками зависимости скорости поступательного движения тел 1, 2 и 3 от времени, определите характер движения каждого тела и его ускорение.

22. Проведите аналогии между кинематическими величинами, используемыми для характеристики поступательного и вращательного движений.

1.3. Основные уравнения классической динамики

Основной смысл динамики Ньютона состоит в том, что именно ускорение, а не скорость обуславливается внешними условиями, описываемыми посредством понятиям силы. Рассматриваются законы Ньютона, обсуждаются уравнения динамики поступательного движения произвольной системы тел.

1.3.1. Первый закон Ньютона. Инерциальные системы

В основе так называемой классической, или ньютоновской, механики лежат три закона динамики, сформулированных И. Ньютоном в 1687 г. Эти законы играют исключительную роль в механике и являются (как и все физические законы) обобщением результатов огромного человеческого опыта.

Первый закон Ньютона: *всякая материальная точка* (*тело*) *сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не заставит ее* (*его*) *изменить это состояние.*

Оба названных состояния схожи тем, что ускорение тела равно нулю. Поэтому формулировке первого закона можно придать следующий вид: *скорость любого тела остается постоянной* (*в частности, равной нулю*)*, пока воздействие на это тело со стороны других тел не вызовет ее изменения.*

Стремление тела сохранить состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется ***инертностью***. Поэтому первый закон Ньютона называют *законом инерции.*

Механическое движение относительно, и его характер зависит от системы отсчета. Первый закон Ньютона выполняется не во всякой системе отсчета, а те системы, по отношению к которым он выполняется, называются *инерциальными системами отсчета.* ***Инерциальной системой отсчета*** *является такая система отсчета, относительно которой материальная точка, свободная от внешних воздействий, либо покоится, либо движется прямолинейно и равномерно* (*т. е. с постоянной скоростью*).

Таким образом*, первый закон Ньютона утверждает существование инерциальных систем отсчета.*

Опытным путем установлено, что инерциальной системой отсчета можно считать гелиоцентрическую (звездную) систему отсчета (начало координат находится в центре Солнца, а оси проведены в направлении определенных звезд). Система отсчета, связанная с Землей, строго говоря, неинерциальная, однако эффекты, обусловленные ее неинерциальностью (Земля вращается вокруг собственной оси и вокруг Солнца), при решении многих задач малы, и в этих случаях ее можно считать инерциальной.

Из приведенных выше примеров легко понять, что основным признаком инерциальной системы является отсутствие ускорения.

Сущность первого закона Ньютона может быть сведена к трем основным положениям:

- *все тела обладают свойствами инерции*;
- *существуют инерциальные системы отсчета, в которых выполняется первый закон Ньютона*;
- *движение относительно. Если тело А движется относительно тела отсчета В со скоростью* υ, *то и тело В, в свою очередь, движется относительно тела А с той же скоростью, но в обратном направлении*: $\upsilon = -\upsilon'$.

1.3.2. Масса и импульс тела

Воздействие на данное тело со стороны других тел вызывает изменение его скорости, т. е. сообщает данному телу ускорение.

Опыт показывает, что одинаковое воздействие сообщает различным телам разные по величине ускорения. *Всякое тело противится попыткам изменить его состояние движения.*

Мерой инертности тела *является величина, называемая* ***массой***.

Чтобы определить массу *некоторого тела, нужно сравнить ее с массой тела, принятого за* эталон массы (или сравнить с телом уже известной массы).

Масса – величина ***аддитивная*** (*масса тела равна сумме масс частей, составляющих это тело*).

Система тел, взаимодействующих только между собой, называется ***замкнутой***.

Рассмотрим замкнутую систему тел массами m_1 и m_2 (рис. 1.3.1).

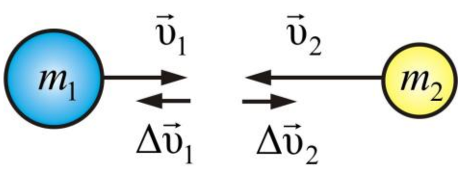


Рис. 1.3.1. Два тела массами m_1 и m_2, сталкивающиеся друг с другом со скоростями υ_1 и υ_2

Столкнем эти два тела. Опыт показывает, что приращенные скорости $\Delta\vec{\upsilon}_1$ и $\Delta\vec{\upsilon}_2$ всегда имеют противоположное направление (отличное знаком), а модули приращений скорости относятся как

$$\frac{|\Delta\vec{\upsilon}_1|}{|\Delta\vec{\upsilon}_2|} = \frac{m_2}{m_1} \tag{1.3.1}$$

(тело, обладающее большей массой, меньше изменяет скорость).

Приняв во внимание направление скоростей, запишем:

$$m_1\Delta\vec{\upsilon}_1 = -m_2\Delta\vec{\upsilon}_2.$$

При $\upsilon << c$ масса $m = \text{const}$ (ньютоновская, классическая механика), тогда имеем

$$\Delta\left(m_1\vec{\upsilon}_1\right) = -\Delta\left(m_2\vec{\upsilon}_2\right).$$

Произведение массы тела m на скорость $\vec{\upsilon}$ называется ***импульсом тела*** $\vec{p}$:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}. \tag{1.3.2}$$

1.3.3. Второй закон Ньютона. Принцип суперпозиции

Во многих прикладных задачах требуется знать движение тела под действием заданных сил. Все подобные задачи, вместе взятые, *составляют **основную задачу динамики***: найти закон движения тела или системы тел при условии, что действующие силы известны. Решение задачи динамики может быть найдено при помощи второго закона Ньютона. В некоторых случаях эта задача имеет простое решение, в других – ее решение наталкивается на непреодолимые математические трудности.

Математическое выражение второго закона Ньютона

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \tag{1.3.3}$$

– *скорость изменения импульса тела равна действующей на него силе.*

Отсюда $d\vec{p} = \vec{F}dt$ – *изменение импульса тела равно импульсу силы.*

Из (3.3.1) получим выражение второго закона через ускорение a:

$$\frac{d\left(m\vec{\upsilon}\right)}{dt} = \vec{F}.$$

Так как $m = \text{const}$, то $m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}$. Но $\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{a}$, тогда

$$m\vec{a} = \vec{F}. \tag{1.3.4}$$

Это привычная запись второго закона Ньютона, или ***основное уравнение динамики поступательного движения материальной точки***.

Принцип суперпозиции,
или принцип независимости действия сил

Силы в механике подчиняются ***принципу суперпозиции***. *Если на материальное тело действуют несколько сил, то результирующую силу* $\vec{\mathrm{F}}$ *можно найти из выражения*

$$\vec{\mathrm{F}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathrm{F}}_i . \qquad (1.3.5)$$

Из второго закона Ньютона имеем:

$$\vec{a} = \frac{\vec{\mathrm{F}}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{\mathrm{F}}_i}{m} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i ,$$

где $\vec{a}_i$ – ускорение тела под действием силы $\vec{\mathrm{F}}_i$. Таким образом, ускорение тоже подчиняется принципу суперпозиции:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i . \qquad (1.3.6)$$

Если на материальную точку действует несколько сил, то каждая из них сообщает точке такое же ускорение, как если бы других сил не было.

Найдем изменение импульса тела за конечный промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$m\vec{\upsilon}_2 - m\vec{\upsilon}_1 = \vec{\mathrm{F}}\Delta t,$$

или

$$\Delta\left(m\vec{\upsilon}\right) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathrm{F}}\,\mathrm{d}t , \qquad (1.3.7)$$

т. е. изменение импульса тела равно импульсу силы.

В системе СИ семь основных единиц (приложение): метр (м), килограмм (кг), секунда (с), ампер (А), кельвин (К), кандела (кд), единица количества вещества (моль).

Остальные единицы называются ***производными*** и получаются из физических законов, связывающих их с основными единицами. Например, из второго закона Ньютона производная единица силы получается равной 1 кг·м/с^2, что соответствует 1 Н.

1.3.4. Третий закон Ньютона

Действие тел друг на друга носит характер взаимодействия.

Третий закон Ньютона *отражает тот факт, что сила есть результат взаимодействия тел, и устанавливает, что* ***силы, с которыми***

действуют друг на друга два тела, равны по величине и противоположны по направлению:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (1.3.8)$$

Однако третий закон справедлив не всегда. Он выполняется в случае контактных взаимодействий, т. е. при соприкосновении тел, а также при взаимодействии тел, находящихся на расстоянии друг от друга, но покоящихся относительно друг друга.

Законы Ньютона плохо работают при $\upsilon \approx c$ (релятивистская механика), а также при движении тел очень малых размеров, сравнимых с размерами элементарных частиц.

1.3.5. Импульс произвольной системы тел

В любой системе частиц имеется одна замечательная точка C, называемая *центром инерции*, или *центром масс*, которая обладает рядом интересных и важных свойств. Положение этой точки характеризует распределение масс этой системы.

Радиус-вектор системы двух частиц (рис. 1.3.2) m_1 и m_2 можно найти по формуле $\vec{r}_c = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$.

В общем случае (рис. 1.3.3) радиус-вектор центра масс системы, состоящей из n материальных точек, равен:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i, \quad (1.3.9)$$

где $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ – общая масса системы; n – число точек системы.

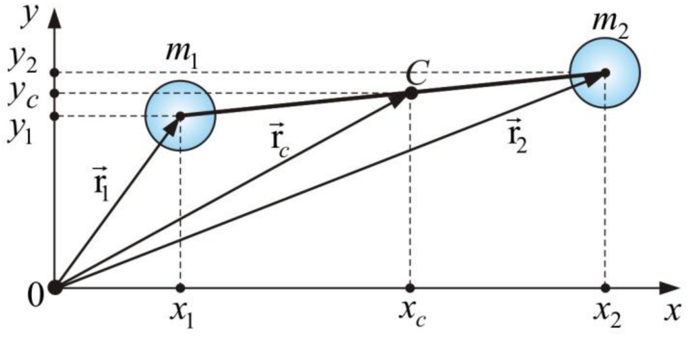


Рис. 1.3.2. Координаты центра масс системы, состоящей из двух тел массами m_1 и m_2

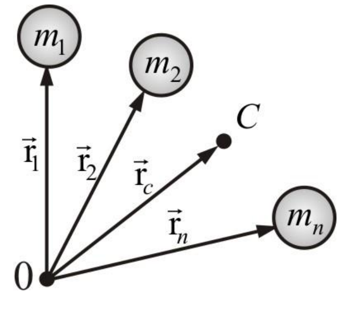


Рис. 1.3.3. Произвольная система тел с центром инерции C

Центр тяжести совпадает с *центром масс* (центром инерции), если g (ускорение силы тяжести) для всех тел системы одинаково.

Скорость центра инерции системы $\vec{\upsilon}_c$ равна

$$\vec{\upsilon}_c = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_c}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i.$$

Здесь

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i \qquad (1.3.10)$$

– импульс системы тел, $\vec{\upsilon}_i$ – скорость i-го тела системы. Так как

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i = m\vec{\upsilon}_c,$$

то импульс системы тел можно определить по формуле

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}_c. \qquad (1.3.11)$$

Импульс системы тел равен произведению массы системы на скорость ее центра инерции.

1.3.6. Основное уравнение динамики поступательного движения

Тела, не входящие в состав рассматриваемой системы, называют ***внешними телами***, а силы, действующие на систему со стороны этих тел, – ***внешними силами***. Силы взаимодействия между телами внутри системы называют ***внутренними силами***.

Результирующая всех внутренних сил, действующих на i-е тело,

$$\vec{F}_i^{\text{внутр}} = \sum_{k \neq i}^{n} \vec{F}_{ik} = \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \ldots + \vec{F}_{in}.$$

По третьему закону Ньютона $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$, поэтому результирующая всех внутренних сил системы равна нулю.

$\vec{F}_i^{\text{внеш}}$ – *результирующая всех внешних сил*, приложенных к i-й точке системы. Назовем $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\text{внеш}}$ – *главным вектором всех внешних сил*, тогда

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}. \qquad (1.3.12)$$

Скорость изменения импульса системы равна главному вектору всех внешних сил, действующих на эту систему.

Это уравнение называют ***основным уравнением динамики поступательного движения системы тел***.

Так как импульс системы $\vec{\mathrm{p}} = m\vec{\upsilon}_c$, то

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\vec{\upsilon}_c\right) = \vec{\mathrm{F}}.$$

Отсюда можно по-другому записать ***основное уравнение динамики поступательного движения системы тел***:

$$m\vec{a}_c = \vec{\mathrm{F}}, \qquad (1.3.13)$$

здесь $\vec{a}_c$ – ускорение центра инерции.

Центр механической системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и на которую действует сила, равная главному вектору внешних сил, приложенных к системе.

На основании третьего закона Ньютона силы, действующие на тела системы со стороны других тел системы (внутренние силы), взаимно компенсируют друг друга. Остаются только внешние силы.

В общем случае движение тела можно рассматривать как сумму двух движений: поступательного со скоростью $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_c$ и вращательного вокруг *центра инерции.*

1.3.7. Закон сохранения импульса

Механическая система называется ***замкнутой*** (*или изолированной*), *если на нее не действуют внешние силы, т. е. она не взаимодействует с внешними телами.*

Каждая реальная система тел всегда незамкнута, т. к. подвержена как минимум воздействию гравитационных сил. Однако если внутренние силы гораздо больше внешних, то такую систему можно считать замкнутой (например, Солнечная система).

Для замкнутой системы равнодействующий вектор внешних сил тождественно равен нулю:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathrm{F}} \equiv 0, \qquad (1.3.14)$$

отсюда

$$\vec{\mathrm{p}} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\upsilon}_c = \mathrm{const}. \qquad (1.3.15)$$

Это есть ***закон сохранения импульса****: импульс замкнутой системы не изменяется во времени.*

Импульс системы тел может быть представлен в виде произведения суммарной массы тел на скорость центра инерции: $\vec{p} = m\vec{\upsilon}_c$, тогда

$$m\vec{\upsilon}_c = \text{const}. \qquad (1.3.16)$$

При любых процессах, происходящих в замкнутых системах, скорость центра инерции сохраняется неизменной.

Закон сохранения импульса является одним из фундаментальных законов природы. Он был получен как следствие законов Ньютона, но он справедлив и для микрочастиц, и для релятивистских скоростей, когда $\upsilon \approx c$.

Если система не замкнута, но главный вектор внешних сил $\vec{F} = 0$, *то* $\vec{p}_{\text{сист}} = \text{const}$, *как если бы внешних сил не было* (например, прыжок из лодки, реактивное движение (рис. 1.3.4) или выстрел из пушки (рис. 1.3.5)).

Рис. 1.3.4. Реактивное движение. Полет шаттла

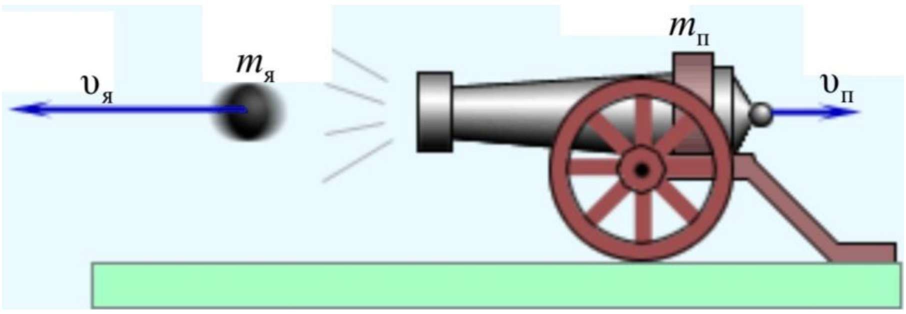
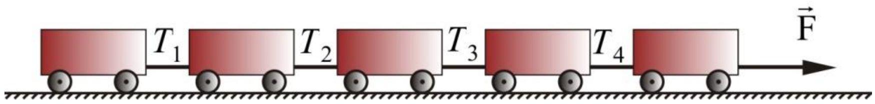


Рис. 1.3.5. Выстрел из пушки. Скорость ядра $\upsilon_я$, масса ядра $m_я$, скорость пушки $\upsilon_п$, масса пушки $m_п$. $\upsilon_я m_я = \upsilon_п m_п$

Закон сохранения импульса является следствием симметрии пространства – времени, в его основе лежит такое свойство пространства – времени, как *однородность пространства*.

Контрольные вопросы. Упражнения

1. Какая система отсчета называется инерциальной? Неинерциальной?
2. Почему система отсчета, связанная с Землей, неинерциальная?
3. Что такое сила? Как ее можно охарактеризовать?
4. Является ли первый закон Ньютона следствием второго закона Ньютона? Почему?
5. В чем заключается принцип независимости действия сил?
6. Что называется механической системой? Какие системы являются замкнутыми?
7. Является ли Вселенная замкнутой системой? Почему?
8. В чем заключается закон сохранения импульса? В каких системах он выполняется?
9. Почему он является фундаментальным законом природы?
10. Каким свойством пространства и времени обусловливается справедливость закона сохранения импульса?
11. Что называется центром масс системы материальных точек? Как движется центр масс замкнутой системы?
12. В чем физическая сущность первого закона Ньютона?
13. Сообщаете ли вы импульс Земле во время прогулки?
14. Телу какой массы сила 1 Н сообщает ускорение 1 м/с^2?
15. Тело массой 1 кг получило ускорение 1 см/с^2. Чему равна сила, действующая на тело?
16. Может ли КПД быть больше единицы; равным единице?
17. Масса самолета в 100 раз больше масс автомобиля, а скорость автомобиля в 20 раз меньше скорости самолета. Что больше кинетическая энергия самолета или автомобиля?
18. Пусть из ружья в горизонтальном направлении стреляет охотник, стоящий на абсолютно гладком льду. Масса охотника 60 кг. Чему равна его скорость при выстреле?
19. Состав из 5 вагонов паровоз тянет с силой $\vec{F}$, как показано на рисунке. Масса вагона m.



а) выразите натяжение связей T_1, T_2, T_3 и T_4 через F и m. Трением можно пренебречь;

б) чему равно ускорение паровоза?

20. Что можно сказать о тормозном пути двух одинаковых грузовиков, движущихся с одинаковой скоростью на одном и том же участке дороги, если один грузовик пустой, а другой полностью загружен? Поясните ответ.

1.4. Силы в механике

Динамика исследует законы и причины, вызывающие движение тела, т. е. изучает движение материальных тел под действием приложенных к ним сил. В этой главе анализируется виды и категории сил в природе, рассматриваются силы тяжести, силы упругости, силы трения.

1.4.1. Виды и категории сил в природе

Одно из простейших определений силы: *влияние одного тела* (*или поля*) *на другое, вызывающее ускорение, – это* ***сила***.

Однако спор вокруг определения силы не закончен до сих пор. Это обусловлено трудностью объединения в одном определении сил, различных по своей природе и характеру проявления. По современным представлениям все явления, протекающие во Вселенной, обусловлены четырьмя типами сил или взаимодействий:

- ***гравитационные*** (проявляются в виде сил всемирного тяготения);
- ***электромагнитные*** (существование атомов, молекул и макротел);
- ***сильные*** (ответственны за связь частиц в ядрах);
- ***слабые*** (ответственны за распад частиц).

Гравитационные *и* ***электромагнитные*** *силы нельзя свести к другим, более простым, силам, поэтому их называют* ***фундаментальными***.

Силы, рассматриваемые в классической механике, имеют электромагнитную (силы упругости, силы трения) и гравитационную природу (силы тяготения, силы тяжести). Для упругих сил и сил трения можно получить лишь приближенные эмпирические формулы.

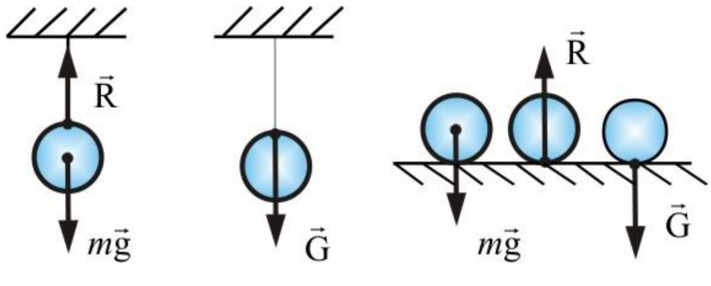
1.4.2. Сила тяжести и вес тела

В динамике при изучении движения тел необходимо знать силы, действующие на тело, и их зависимость от различных величин.

Одна из фундаментальных сил, ***сила гравитации***, проявляется на Земле в виде ***силы тяжести*** – силы, с которой все тела притягиваются к Земле.

Вблизи поверхности Земли все тела падают с одинаковым ускорением – *ускорением свободного падения* g. Отсюда вытекает, что в системе отсчета, связанной с Землей, на всякое тело действует ***сила тяжести*** $m\vec{g}$. Она приблизительно равна силе гравитационного притяжения к Земле.

Если подвесить тело (рис. 1.4.1) или положить его на опору, то сила тяжести уравновесится силой $\vec{R}$, которую называют ***реакцией опоры***, или ***подвеса***.



а *б*

Рис. 1.4.1. Тело на подвесе (а) и на опоре (б)

По третьему закону Ньютона тело действует на подвес или опору *с силой* $\vec{G}$, *которая называется* ***весом тела***. Итак, ***вес тела*** – это сила, с которой тело в состоянии покоя действует на подвес или опору вследствие гравитационного притяжения к Земле. Поскольку силы $m\vec{g}$ и $\vec{R}$ уравновешивают друг друга, то выполняется соотношение

$$m\vec{g} = -\vec{R}.$$

Согласно третьему закону Ньютона $\vec{G} = -\vec{R}$. Тогда

$$\vec{G} = m\vec{g}, \tag{1.4.1}$$

т. е. *вес и сила тяжести равны друг другу, но приложены к разным точкам*: *вес – к подвесу или опоре*, *сила тяжести – к самому телу*. Это равенство справедливо, если подвес (опора) и тело покоятся относительно Земли (или двигаются равномерно, прямолинейно). Если имеет место движение с ускорением, то справедливо соотношение

$$G = mg \pm ma = m(g \pm a). \tag{1.4.2}$$

Вес тела может быть больше или меньше силы тяжести: если g и a направлены в одну сторону (тело движется вниз или падает), то $G < mg$, и если наоборот, то $G > mg$. Если же тело движется с ускорением $a = g$, то $G = 0$, т. е. наступает *состояние невесомости*.

1.4.3. Упругие силы. Механические свойства твердых тел

Электромагнитные силы в механике проявляют себя как *упругие силы и силы трения.*

Под действием внешних сил возникают *деформации* (от лат. *deformatio* – *искажение*), т. е. смещение частиц тела из равновесных положений. Если после прекращения действия внешних сил восстанавливаются прежние форма и размеры тела, то деформация называется *упругой.* Деформация имеет упругий характер в случае, если внешняя сила не превосходит определенного значения, называемого *пределом упругости.* При превышении этого предела деформация становится *пластичной,* или *неупругой*, т. е. первоначальные размеры и форма тела полностью не восстанавливаются.

Рассмотрим упругие деформации.

В деформированном теле (рис. 1.4.2) возникают упругие силы, уравновешивающие внешние силы. Под действием внешней силы $F_{вн}$ пружина получает удлинение x – в результате в ней возникает упругая сила $F_{упр}$, уравновешивающая $F_{вн}$, причем $F_{упр} = -F_{вн}$.

Упругие силы возникают во всей деформированной пружине. Любая часть пружины действует на другую часть с силой упругости $F_{упр}$.

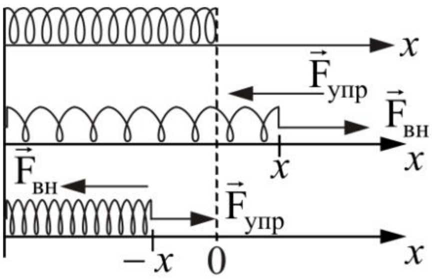


Рис. 1.4.2. Сжатие или растяжение пружины под действием внешней силы $F_{вн}$: сила упругости $F_{упр}$ уравновешивает внешнюю силу $F_{вн}$. $F_{упр} = – F_{вн}$

Удлинение пружины пропорционально внешней силе и определяется ***законом Гука***:

$$x = \frac{1}{k} F_{вн}, \text{ или } x = -\frac{1}{k} F_{упр}, \tag{1.4.3}$$

где k – *жесткость пружины*. Видно, что чем больше k, тем меньшее удлинение получит пружина под действием данной силы.

Закон Гука можно записать в виде $F_{упр} = -kx$.

Элементарная работа, совершенная пружиной, $\mathrm{d}A = F\mathrm{d}x$, или

$$\mathrm{d}A = -kx\mathrm{d}x,$$

$$A = \int \mathrm{d}A = -\int_0^x kx\mathrm{d}x = -\frac{kx^2}{2}.$$

Таким образом, ***полная работа****, которая совершена пружиной, равна*

$$A = -\frac{kx^2}{2}.$$

Закон Гука для стержня

Одностороннее растяжение (сжатие) стержня состоит в увеличении (уменьшении) длины стержня под действием внешней силы $\vec{F}$ (рис. 1.4.3). Такая деформация приводит к возникновению в стержне упругих сил, которые принято характеризовать *напряжением* σ:

$$\sigma = \frac{F_{упр}}{S},$$

где S – площадь поперечного сечения стержня.

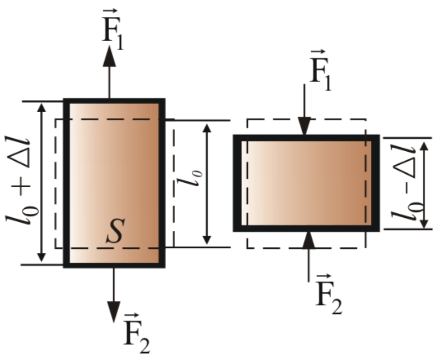


Рис. 1.4.3. Одностороннее растяжение (сжатие) стержня под действием внешней силы $\vec{F}$

В случае растяжения σ считается положительной, а в случае сжатия – отрицательной. Опыт показывает, что *приращение длины стержня* Δl *пропорционально напряжению* σ:

$$\Delta l = \sigma / k.$$

Коэффициент пропорциональности k, как и в случае пружины, зависит от свойств материала и длины стержня.

Доказано, что $k = E/l_0$, где E – *величина, характеризующая упругие свойства материала стержня –* ***модуль Юнга***.

Тогда приращение длины можно выразить через модуль Юнга:

$$\Delta l = l_0 \sigma / E,$$

или, обозначив $\Delta l / l_0 = \varepsilon$ (*относительное продольное растяжение/сжатие*), получим:

$$\varepsilon = \sigma / E. \tag{1.4.4}$$

З***акон Гука для стержня***: *относительное приращение длины стержня прямо пропорционально напряжению и обратно пропорционально модулю Юнга.*

Заметим, что растяжение или сжатие стержней сопровождается соответствующим изменением их поперечных размеров d_0 и d (рис. 1.4.3).

Относительное поперечное растяжение (сжатие) $\varepsilon' = \Delta d / d_0$.

Отношение относительного поперечного растяжения стержня $\Delta d / d_0$ к относительному продольному растяжению $\Delta l / l_0$ называют ***коэффициентом Пуассона***:

$$\mu = \varepsilon' / \varepsilon. \tag{1.4.5}$$

Потенциальная энергия упруго растянутого (сжатого) стержня

$$E_{\text{п}} = \int_0^{\Delta l} F\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{ES}{l}(\Delta l)^2 = \frac{E\varepsilon}{2}V,$$

где V – объем стержня.

Объемная плотность потенциальной энергии тела ω_σ при растяжении (сжатии) определяется удельной работой по преодолению упругих сил $A_{\text{упр}}$, рассчитанной на единицу объема тела:

$$w_\sigma = A_{\text{упр}} = \frac{\sigma^2}{2E}. \tag{1.4.6}$$

Диаграмма деформации

На рис. 1.4.4 показан график зависимости нормального напряжения $\sigma = F/S$ от относительного удлинения $\varepsilon = \Delta l/l$ при растяжении тела.

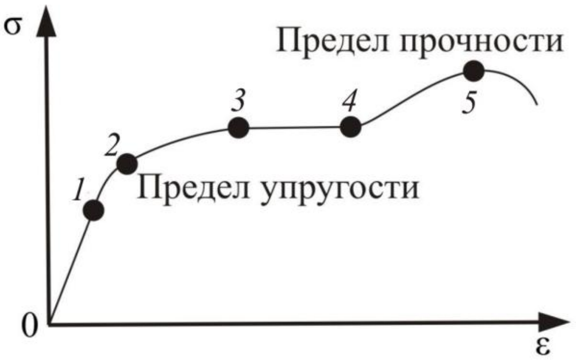


Рис. 1.4.4. График зависимости нормального напряжения от относительного удлинения

В области *0–1* упругие деформации подчиняются закону Гука: напряжение σ, возникающее под действием внешних сил, прямо пропорционально относительной деформации ε:

$$\sigma = E\varepsilon = E\Delta l/l.$$

Максимальное напряжение σ_{max}, после снятия которого тело еще способно восстановить первоначальную форму и объем, называется *пределом упругости*. Пределу упругости на графике соответствует точка *2*.

При дальнейшем увеличении напряжения возникают остаточные деформации (участок *2–3*), затем удлинение деформированного тела происходит без увеличения внешней нагрузки (участок *3–4*). Точка *3* на графике соответствует *пределу текучести*.

Наибольшее напряжение, которое выдерживает тело, не разрушаясь, называется *пределом прочности* (точка *5*). На практике, чтобы избежать разрушения какой-либо детали, ее проектируют с *запасом прочности*:

$$\sigma_{\text{проч}} / \sigma_{\text{доп}} = n,$$

где $\sigma_{\text{проч}}$ – предел прочности материала; $\sigma_{\text{доп}}$ – допустимое напряжение.

Диаграмма напряжений (рис. 1.4.4) для реальных твердых тел зависит от многих факторов. Например, при кратковременном действии сил твердое тело может проявить себя как хрупкое, а при длительном воздействии слабых сил является текучим. При растяжении и сжатии тел происходит изменение их поперечных размеров.

1.4.4. Силы трения

Силой трения *называют силу, которая возникает при движении одного тела по поверхности другого*. Она всегда направлена противоположно направлению движения. *Сила трения прямо пропорциональна силе нормального давления* на трущиеся поверхности и зависит от свойств этих поверхностей. Законы трения связаны с электромагнитным взаимодействием, которое существует между телами.

Различают трение *внешнее* и *внутреннее.*

Внешнее трение возникает при относительном перемещении двух соприкасающихся твердых тел (*трение скольжения или трение покоя*).

Внутреннее трение наблюдается при относительном перемещении частей одного и того же сплошного тела (жидкость или газ).

Различают ***сухое*** и ***жидкое*** (или *вязкое*) трение.

Сухое трение возникает между поверхностями твердых тел в отсутствие смазки.

Жидким **(*вязким*)** называется трение между твердым телом и жидкой или газообразной средой или ее слоями.

Сухое трение, в свою очередь, подразделяется на ***трение скольжения*** и ***трение качения***.

Рассмотрим законы сухого трения (рис. 1.4.5).

Подействуем на тело, лежащее на неподвижной плоскости, внешней силой $\vec{F}_{\text{дв}}$, постепенно увеличивая ее модуль. Вначале брусок будет оставаться неподвижным, значит, внешняя сила $\vec{F}_{\text{дв}}$ уравновешивается некоторой силой $\vec{F}_{тр}$, направленной по касательной к трущейся поверхности. В этом случае $\vec{F}_{тр}$ есть *сила трения покоя*.

Установлено, что максимальная сила трения покоя не зависит от площади соприкосновения тел и приблизительно пропорциональна модулю *силы нормального давления* N:

$$F_{тр.пок} = \mu_0 N,$$

μ_0 – *коэффициент трения покоя*, зависящий от природы и состояния трущихся поверхностей.

Когда модуль внешней силы, а следовательно и модуль силы трения покоя превысит значение F_0, тело начнет скользить по опоре – трение покоя $F_{тр.пок}$ сменится трением скольжения $F_{тр.ск}$ (рис. 1.4.6):

$$F_{тр} = \mu N, \qquad (1.4.7)$$

где μ – коэффициент трения скольжения.

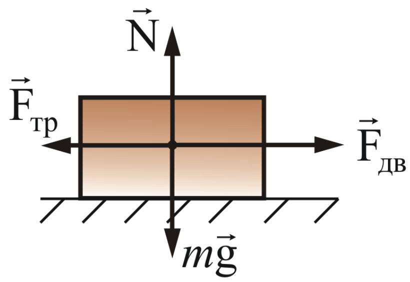


Рис. 1.4.5. На брусок, лежащий на плоскости, действует сила $\vec{F}_{дв}$

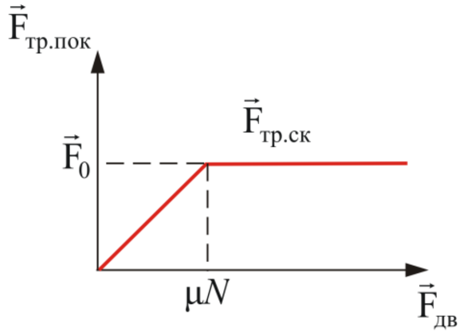


Рис. 1.4.6. Когда модуль $\vec{F}_{дв}$ *превысит значение* $\vec{F}_0$*, брусок начнет скользить*

Трение качения *возникает между шарообразным телом и поверхностью, по которой оно катится.* Сила трения качения подчиняется тем же законам, что и сила трения скольжения, но коэффициент трения μ здесь значительно меньше. $F_{тр} = \mu N/R$, где R – радиус катящегося тела.

Рассмотрим силу трения скольжения на наклонной плоскости (рис. 1.4.7).

На тело, находящееся на наклонной плоскости с сухим трением, действуют три силы: *сила тяжести* $m\vec{g}$, *нормальная сила реакции опоры* $\vec{N}$ и *сила сухого трения* $\vec{F}_{тр}$. Сила $\vec{F}$ есть *равнодействующая* сил $m\vec{g}$ и $\vec{N}$; она направлена вниз, вдоль наклонной плоскости. Из рис. 1.4.7 видно, что

$$F = mg\sin\alpha, \quad N = mg\cos\alpha.$$

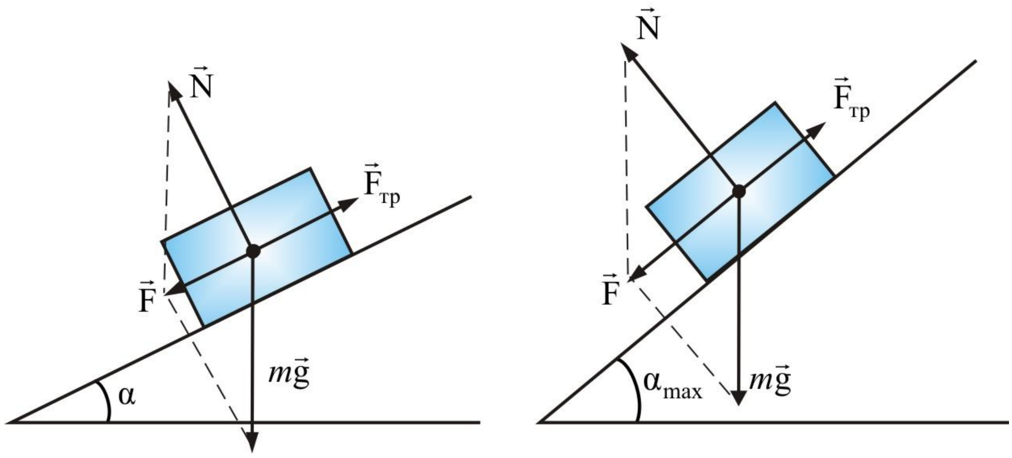


Рис. 1.4.7. Тело на наклонной плоскости

Если $F < (F_{тр})_{max} = \mu N$, тело остается неподвижным на наклонной плоскости. *Максимальный угол наклона* α определяется из условия $(F_{тр})_{max} = F$ или $\mu mg\cos\alpha = mg\sin\alpha$, следовательно,

$$\mathrm{tg}\alpha_{max} = \mu,$$

где μ – коэффициент сухого трения;

$$F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha, \; F = mg\sin\alpha.$$

При $\alpha > \alpha_{max}$ тело будет скатываться с ускорением

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha); \tag{1.4.8}$$

$$F_{ск} = ma = F - F_{тр}. \tag{1.4.9}$$

Если дополнительная сила $F_{вн}$, направленная вдоль наклонной плоскости, приложена к телу, то критический угол α_{max} и ускорение тела будут зависеть от величины и направления этой внешней силы.

Контрольные вопросы. Упражнения

1. Какие типы сил (взаимодействий) вы знаете?
2. Чем характеризуется сила в каждый момент времени?
3. Что такое вес тела? В чем отличие веса тела от силы тяжести?
4. Как объяснить возникновение невесомости при свободном падении?
5. На какой высоте над планетой ускорение свободного падения вдвое меньше, чем на ее поверхности?
6. Как себя проявляют в механике упругие силы и силы трения?
7. Сформулируйте закон Гука для пружины и для стержня.
8. Что такое модуль Юнга? Коэффициент Пуассона?

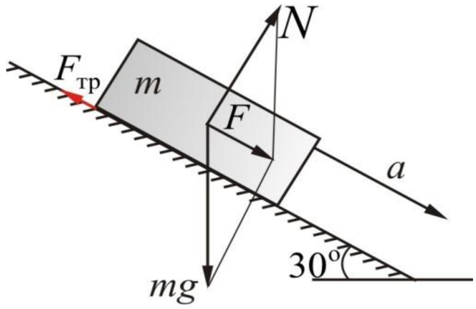
9. Каков физический смысл модуля Юнга?

10. Дайте объяснение диаграммы напряжений. Что такое переделы пропорциональности, упругости и прочности?

11. Какова физическая сущность трения? В чем отличие сухого трения от жидкого?

12. Какие виды внешнего (сухого) трения вы знаете?

13. Предполагая, что на рисунке угол наклона возрастает до тех пор, пока брусок не начинает скользить, выведите соотношение между ускорением бруска и величинами: μ_s – статический коэффициент трения, μ_d – динамический коэффициент трения и g – ускорение свободного падения. Исходя из рисунка и зная, что μ_s = 0,3, а μ_d = 0,2 + $A\upsilon$, где A = 2 с/м, найдите:



а) Чему равно начальное ускорение?

б) Какова предельная скорость?

14. Автомобиль медленно съезжает с горы, имеющей уклон 30°. Он попадает на травяной участок, на котором μ_s = 0,5 и μ_d = 0,48. Начнет ли автомобиль скользить и если да, то через какое сколько времени скорость скольжения достигнет 60 км/ч?

1.5. Неинерциальные системы отсчета

Как уже отмечалось, законы Ньютона выполняются только в инерциальных системах отсчета. Системы отсчета, движущиеся относительно инерциальной системы с ускорением, называются неинерциальными. В принципе использование неинерциальных систем отсчета ничем не запрещено. Надо только соответствующим образом подправить законы динамики.

1.5.1. Уравнение Ньютона для неинерциальных систем

Законы инерции выполняются в инерциальной системе отсчета.

В неинерциальной системе также можно воспользоваться законами Ньютона, если ввести силы инерции. Они фиктивны. Их вводят специально, чтобы воспользоваться уравнениями Ньютона в неинерциальной системе.

Силы инерции обусловлены не взаимодействием тел, а свойствами самих неинерциальных систем отсчета. На силы инерции законы Ньютона не распространяются.

Найдем количественное выражение для силы инерции при поступательном движении неинерциальной системы отсчета.

Введем обозначения:

$\vec{a}'$ – ускорение тела массы m относительно неинерциальной системы;

$\vec{a}''$ – ускорение неинерциальной системы относительно инерциальной (относительно Земли).

Тогда ускорение тела относительно инерциальной системы:

$$\vec{a} = \vec{a}'' + \vec{a}'. \qquad (1.5.1)$$

Ускорение в инерциальной системе можно выразить через второй закон Ньютона:

$$\vec{F}/m = \vec{a}'' + \vec{a}', \text{ отсюда } \vec{a}' = \vec{F}/m + \vec{F}_{\text{ин}}/m,$$

где $\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}''$ – сила инерции, направленная в сторону, противоположную ускорению неинерциальной системы. Тогда получим:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{\text{ин}} \qquad (1.5.2)$$

– ***уравнение Ньютона*** для неинерциальной системы отсчета.

Здесь сила инерции $\vec{F}_{\text{ин}}$ – фиктивная сила, обусловленная свойствами системы отсчета, необходимая нам для того, чтобы иметь возможность описывать движения тел в неинерциальных системах отсчета с помощью уравнений Ньютона.

Силы инерции неинвариантны относительно перехода из одной системы отсчета в другую. Они не подчиняются закону действия и противодействия. Движение тела под действием сил инерции аналогично движению во внешнем силовом поле. Силы инерции всегда являются внешними по отношению к любому движению системы материальных тел.

1.5.2. Центростремительная и центробежная силы

Рассмотрим вращение камня массой m на веревке (рис. 1.5.1).

В каждый момент времени камень должен был бы двигаться прямолинейно по касательной к окружности. Однако он связан с осью вращения веревкой. Веревка растягивается, появляется упругая сила, действующая на камень, направленная вдоль веревки к центру вращения. Это и есть ***центростремительная сила*** (при вращении Земли вокруг оси в качестве центростремительной силы выступает сила гравитации):

$$\vec{\mathrm{F}}_{\text{цс}} = m\vec{a}_{\text{цс}}, \text{ но т. к. } \vec{a}_{\text{цс}} = \vec{a}_n = \upsilon^2/R, \text{ то}$$

$$\vec{\mathrm{F}}_{\text{цс}} = m\vec{a}_n, \text{ или } F_{\text{цс}} = m\upsilon^2/R. \tag{1.5.3}$$

Центростремительная сила возникла в результате действия камня на веревку, т. е. это сила, приложенная к телу, – сила инерции второго рода. *Она фиктивна – ее нет.*

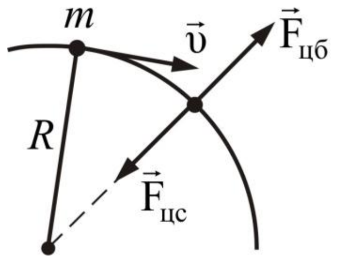


Рис. 1.5.1. Вращение камня массой m на веревке длинной R:
$\vec{\mathrm{F}}_{\text{цс}}$ *приложена к камню и направлена к центру вращения.*
$\vec{\mathrm{F}}_{\text{цб}}$ *приложена к связи и направлена от центра*

Сила же, приложенная к связи и направленная по радиусу от центра, называется **центробежной**. Это сила инерции первого рода.

Центростремительная сила приложена к вращающемуся телу, а центробежная сила – к связи. *Центробежной силы, приложенной к вращающемуся телу, не существует.*

С точки зрения наблюдателя, в неинерциальной системе есть сила, уравновешивающая $F_{\text{цс}}$, равная ей по величине и противоположная по направлению:

$$\vec{F}_{цб} = -m\vec{a}_n, \text{ или } F_{цб} = -m\upsilon^2/R.$$

Так как $a_n = \omega^2 R$ (здесь ω – угловая скорость вращения камня), то

$$F_{цб} = m\omega^2 R. \tag{1.5.4}$$

1.5.3. Вклад вращения Земли в ускорение свободного падения

Все мы (и физические приборы тоже) находимся на Земле, вращающейся вокруг оси, следовательно, в неинерциальной системе (рис. 1.5.2). Из рисунка видно, что ускорение свободного падения и сила тяжести зависят от широты местности φ.

В тех случаях, когда требуется исследовать движение тел относительно Земли с достаточно высокой точностью, необходимо учитывать действие сил инерции, вызванных вращением Земли вокруг своей оси.

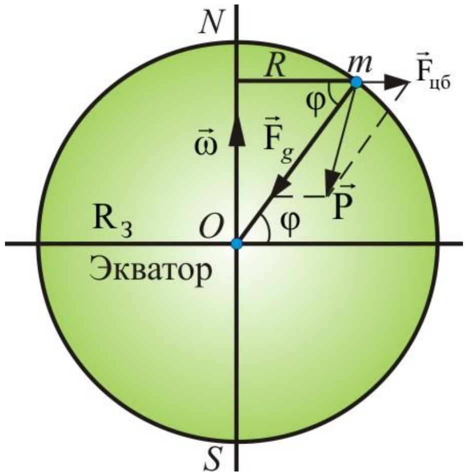


Рис. 1.5.2. К определению зависимости ускорения свободного падения g и силы тяжести от широты местности φ

Расстояние R от рассматриваемого тела до оси вращения Земли является функцией *географической широты* φ: $R = R_{Ç}\cos\varphi$;

$$F_{цб} = m\omega^2 R = m\omega^2 R_З \cos\varphi,$$

где ω – угловая скорость вращения Земли.

Сила тяжести есть результат сложения двух сил: $\vec{F}_g$ и $\vec{F}_{цб}$; таким образом, g (а значит и mg) *зависит от широты местности*:

$$\vec{P} = m\vec{g} = \vec{F}_g + \vec{F}_{öá},$$

где g = 9,80665 м/с^2 – ускорение свободного падения тела.

Направлено g точно к центру только на полюсе и на экваторе. На экваторе вес тела $P \approx m(g - \omega^2 R_З)$ на 0,3 % меньше, чем на полюсах, в результате вращения Земли.

1.5.4. Сила Кориолиса

Земля дважды неинерционная система отсчета, поскольку она движется вокруг солнца и вращается вокруг своей оси. На тела неподвижные, как было показано в разделе 1.5.2, действует лишь центробежная сила. В 1829 г. французский физик Г. Кориолис показал, что на движущееся тело действует еще одна сила инерции. Ее называют силой Кориолиса. Эта сила всегда перпендикулярна к оси вращения и направлению скорости υ.

Появление кориолисовой силы можно обнаружить на следующем примере. Возьмем горизонтально расположенный диск, который может вращаться вокруг вертикальной оси. Прочертим на диске радиальную прямую *OA* (рис. 1.5.3).

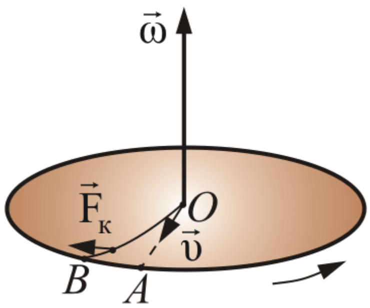


Рис. 1.5.3. К определению силы Кориолиса

Запустим в направлении от *O* к *A* шарик со скоростью $\vec{\upsilon}$. Если диск не вращается, шарик должен катиться вдоль *OA*. Если же диск привести во вращение в направлении, указанном стрелкой, то шарик будет катиться по кривой *OB*, причем его скорость относительно диска быстро изменяет свое направление. Следовательно, по отношению к вращающейся системе отсчета шарик ведет себя так, как если бы на него действовала сила $\vec{F}_к$, перпендикулярная направлению движения шарика.

Сила Кориолиса не является «настоящей» в смысле механики Ньютона. При рассмотрении движений относительно инерциальной системы отсчета такая сила вообще не существует. Она вводится искусственно при рассмотрении движений в системах отсчета, вращающихся относительно инерциальных, чтобы придать уравнениям движения в таких системах формально такой же вид, что и в инерциальных системах отсчета.

Чтобы заставить шарик катиться вдоль *OA*, нужно сделать направляющую, выполненную в виде ребра. При качении шарика направляющее ребро действует на него с некоторой силой. Относительно вращающейся системы (диска) шарик движется с постоянной по направлению скоростью. Это можно объяснить тем, что эта сила уравновешивается приложенной к шарику силой инерции

$$\vec{F}_к = 2m\left[\vec{\upsilon}, \vec{\omega}\right],$$

здесь $\vec{F}_к$ – сила Кориолиса, также являющаяся силой инерции; $\vec{\omega}$ – угловая скорость вращения диска.

Сила Кориолиса вызывает кориолисово ускорение. Выражение для этого ускорения имеет вид

$$\vec{a}_к = 2\left[\vec{\upsilon}, \vec{\omega}\right].$$

Ускорение направлено перпендикулярно векторам $\vec{\omega}$ и $\vec{\upsilon}$ и максимально, если относительная скорость точки $\vec{\upsilon}$ ортогональна угловой скорости $\vec{\omega}$ вращения подвижной системы отсчета. Кориолисово ускорение равно нулю, если угол между векторами $\vec{\omega}$ и $\vec{\upsilon}$ равен нулю или π, либо если хотя бы один из этих векторов равен нулю.

Следовательно, в общем случае при использовании уравнений Ньютона во вращающейся системе отсчета возникает необходимость учитывать центробежную, центростремительную силы инерции, а также кориолисову силу.

Влияние кориолисовых сил необходимо учитывать в ряде случаев при истолковании явлений, связанных с движением тел относительно земной поверхности. Например, при свободном падении тел на них действует кориолисова сила, обусловливающая отклонение к востоку от линии отвеса. Эта сила максимальна на экваторе и обращается в нуль на полюсах. Летящий снаряд также испытывает отклонения, обусловленные кориолисовыми силами инерции. Например, при выстреле из орудия, направленного на север, снаряд будет отклоняться к востоку в северном полушарии и к западу – в южном. При стрельбе вдоль экватора силы Кориолиса будут прижимать снаряд к Земле, если выстрел произведен в восточном направлении.

Возникновение некоторых циклонов в атмосфере Земли происходит в результате действия силы Кориолиса. В северном полушарии все устремляющиеся к месту пониженного давления воздушные потоки отклоняются вправо по своему движению.

Сила Кориолиса действует на тело, движущееся вдоль меридиана, в северном полушарии вправо и в южном – влево (рис. 1.5.4).

Это приводит к тому, что у рек подмывается всегда правый берег в северном полушарии и левый – в южном. Эти же причины объясняют неодинаковый износ рельсов железнодорожных путей.

Силы Кориолиса проявляются и при качаниях маятника Фуко (рис. 1.5.5). Вращение плоскости качаний маятника Фуко дает непосредственное доказательство вращения Земли вокруг своей оси.

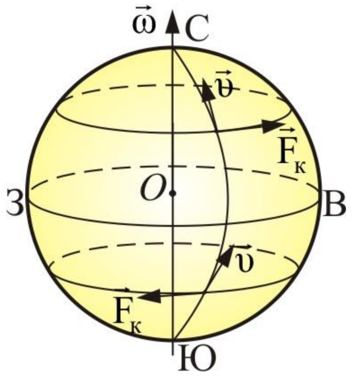


Рис. 1.5.4. Действие силы Кориолиса на тело, движущееся вдоль меридиана

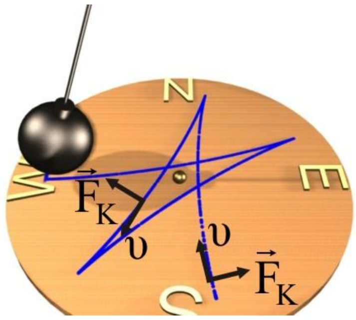


Рис. 1.5.5. Влияние силы Кориолиса на отклонение маятника Фуко

Если тело *удаляется от оси вращения, то сила* $F_{\text{к}}$ *направлена противоположно вращению и замедляет его*. Если тело *приближается к оси вращения, то* $F_{\text{к}}$ *направлена в сторону вращения.*

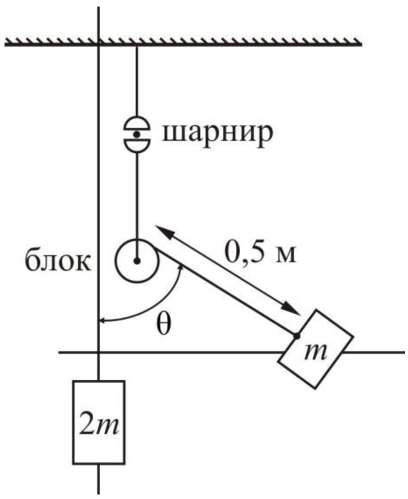
С учетом всех сил инерции уравнение Ньютона для неинерциальной системы отсчета примет вид:

$$m\vec{a}' = \vec{\mathrm{F}}_{\text{ин}} + \vec{\mathrm{F}}_{\text{цб}} + \vec{\mathrm{F}}_{\text{к}}, \quad (1.5.5)$$

где $\vec{a}'$ – ускорение тела относительно неинерциальной системы отсчета; $\vec{\mathrm{F}}_{\text{ин}} = -m\vec{a}$ – сила инерции, обусловленная поступательным движением неинерциальной системы отсчета; $\vec{\mathrm{F}}_{\text{цб}} = m\vec{a}_n$ и $\vec{\mathrm{F}}_{\text{к}} = 2m[\vec{\upsilon}, \vec{\omega}]$ – центробежная и кориолисова силы инерции, обусловленные вращательным движением системы отсчета.

Контрольные вопросы. Упражнения

1. Когда и почему необходимо рассматривать силы инерции?
2. Что такое силы инерции? Чем они отличаются от сил, действующих в инерциальных системах отсчета?
3. Запишите уравнение Ньютона для неинерциальной системы с учетом всех сил инерции.
4. Какую систему отсчета называют инерциальной, неинерциальной?
5. Какая физическая величина характеризует инертность тел?
6. В чем проявляется инертность тел?
7. Как изменяется сила притяжения в зависимости от расстояния до центра Земли? В каких точках Земли сила тяготения равна силе тяжести?
8. В каких точках Земли наблюдается наибольшая разность между силой тяготения и силой тяжести?
9. К каким последствиям привело бы внезапное исчезновение силы тяготения?
10. Как направлены центробежная сила инерции и сила Кориолиса? Когда они проявляются?
11. В северном полушарии производится выстрел вдоль меридиана на север. Как скажется на движении снаряда суточное вращение Земли?
12. Самолет, двигаясь со скоростью υ, совершает в вертикальной плоскости мертвую петлю радиуса r. Как направлена сила реакции опоры в нижней точке; в верхней точке; нормальное (центростремительное) ускорение в нижней точке траектории; в верхней точке траектории?
13. Тело массой m движется по окружности в плоскости xz (блок вращается с телом массой m). Тело массой $2m$ находится на оси вращения (см. рис.). Пренебрегая массой нити и блока, а также трением в блоке, найдите период обращения тела массой m. Чему равен угол θ?



1.6. Энергия. Работа. Мощность. Законы сохранения

В этой главе мы начинаем знакомство с простейшими формулами энергии – потенциальной энергией тела в силовом поле и кинетической энергией движущегося тела. Показывается, что законы сохранения справедливы для изолированных систем и в целом обусловлены фундаментальными свойствами пространства и времени: однородностью, изотропностью пространства и однородностью времени.

1.6.1. Кинетическая энергия. Работа и мощность

Универсальной количественной мерой движения и взаимодействия всех видов материи является *энергия*. Кинетическая энергия $E_к$ – физическая скалярная величина, являющаяся мерой механического движения тел.

Уравнение движения тела массы m под действием внешней силы $\vec{F}$ имеет вид (рис. 1.6.1):

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}, \text{ или в проекции на направление движения } m\frac{d\upsilon}{dt} = F_\tau .$$

Умножив обе части этого равенства на $\upsilon\, dt = dr$, получим

$$m\upsilon\, d\upsilon = F_\tau\, dr.$$

Левая часть равенства есть *полный дифференциал некоторой функции*

$$m\upsilon\, d\upsilon = d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right), \text{ тогда } d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = F_\tau dr.$$

Если система замкнута, то $\vec{F}^{внеш} = 0$ и $F_\tau = 0$, тогда и $d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = 0.$

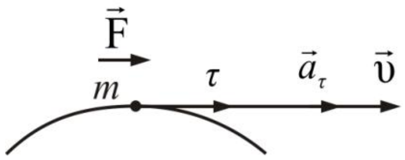


Рис. 1.6.1. Движение тела массы m под действием силы $\vec{F}$

Если полный дифференциал некоторой функции, описывающей поведение системы, равен нулю, то эта функция может служить характеристикой состояния данной системы.

Функция состояния системы, определяемая только скоростью ее движения, называется ***кинетической энергией***:

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2}$$

Кинетическая энергия системы есть функция состояния движения этой системы. Кинетическая энергия – величина аддитивная:

$$E_\text{к} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \upsilon_i^2}{2}.$$

$E_\text{к}$ – относительная величина, ее значение зависит от выбора системы координат (так же как и скорость $\vec{\upsilon}$ – относительная величина).

Связь кинетической энергии с импульсом –

$$E_\text{к} = \frac{p^2}{2m}. \qquad (1.6.1)$$

Связь кинетической энергии с работой

Если постоянная сила действует на тело, то оно будет двигаться в направлении силы. Тогда элементарная работа по перемещению тела из одной точки в другую будет равна произведению силы F на перемещение dr:

$$\mathrm{d}A = F\mathrm{d}r,$$

$$A = \int_1^2 F\mathrm{d}r = m\int_1^2 \upsilon \mathrm{d}\upsilon = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2},$$

$$\text{или } A = \int_1^2 F\mathrm{d}r = E_{\text{к}2} - E_{\text{к}1}.$$

Следовательно, ***работа силы***, *приложенной к телу на пути* r, *численно равна изменению кинетической энергии этого тела*:

$$A = \Delta E_\text{к}, \text{ или } \mathrm{d}E_\text{к} = \mathrm{d}A. \qquad (1.6.2)$$

Изменение кинетической энергии d$E_\text{к}$ *равно работе внешних сил*.

Скорость совершения работы (передачи энергии) называется *мощностью*, т. е. ***мощность*** *есть работа, совершаемая в единицу времени.*

Мгновенная мощность $N = \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$, или $N = F\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = F\upsilon.$

Средняя мощность $\langle N \rangle = \dfrac{A}{\Delta t}.$

Энергия и работа измеряются в СИ в единицах произведения силы на расстояние, т. е. в ньютонах на метр; 1 Н·м = 1 Дж.

Кроме того, в качестве единицы измерения энергии используется внесистемная единица – электрон-вольт (эВ); 1 эВ = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Мощность измеряется в ваттах; 1 Вт = 1 Дж/с.

1.6.2. Консервативные силы и системы

Кроме контактных взаимодействий, наблюдаются взаимодействия между телами, удаленными друг от друга. Подобное взаимодействие осуществляется посредством физических полей (особая форма материи). Каждое тело создает вокруг себя поле, которое проявляет себя именно воздействием на другие тела.

Силы, работа которых не зависит от пути, по которому двигалось тело, а зависит от начального и конечного положения тела, называются ***консервативными***.

Пусть A – работа консервативных сил по перемещению тела из точки *1* в точку *2* (рис. 1.6.2):

$$A_{1a2} = A_{1b2} = A_{1l2} = A_{12}.$$

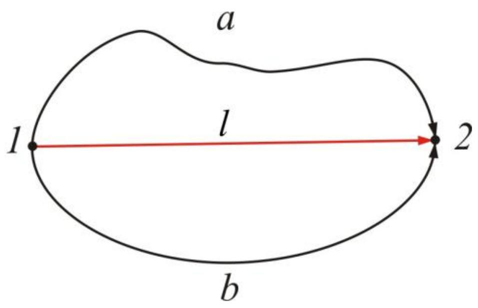


Рис. 1.6.2. Работа консервативных сил по перемещению тела из точки 1 в точку 2 не зависит от формы пути

Изменение направления движения на противоположное вызывает изменение знака работы консервативных сил. Отсюда следует, что *работа консервативных сил вдоль замкнутой кривой равна нулю*:

$$\oint_L F\mathrm{d}r = A_{12} + A_{21} = A_{12} - A_{12} = 0. \qquad (1.6.3)$$

Интеграл по замкнутому контуру L $\oint_L \vec{\mathrm{F}}\mathrm{d}r$ *называется циркуляцией вектора* $\vec{\mathrm{F}}$. Следовательно*, если циркуляция какого-либо вектора силы равна нулю, то эта сила консервативна*.

Центральные силы являются консервативными независимо от их природы. Сила называется центральной, если она направлена к одной и той же точке (или от одной и той же точки) и зависит только от расстояния до этой точки, называемой центром сил.

Консервативные силы: гравитационные силы тяжести, электростатические силы, силы центрального стационарного поля и т. д.

Неконсервативные силы: силы трения, силы вихревого электрического поля и т. д.

Консервативная система – такая система, внутренние силы которой только консервативные, внешние – консервативны и стационарны.

Пример консервативных сил – гравитационные силы (рис. 1.6.3).

Работа силы тяжести $A_{12} = mgh.$ С другой стороны, $A_{12'} = mgl\cos\alpha =$ $= mgh$, где α – угол между силой $m\vec{g}$ и направлением перемещения.

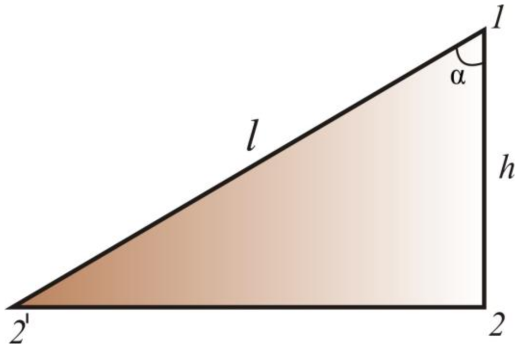


Рис. 1.6.3. Работа силы тяжести по перемещению тела массой m из положения 1 в положение 2

Таким образом, из примера видно, что работа не зависит от формы пути, значит силы консервативны, а поле этих сил потенциально.

Здесь полезно вспомнить «золотое правило механики», согласно которому ни один из простых механизмов не дает выигрыша в работе; во сколько раз выигрываем в силе, во столько же раз проигрываем в расстоянии.

1.6.3. Потенциальная энергия

Если на систему материальных тел действуют консервативные силы, то можно ввести понятие потенциальной энергии.

Кинетическая энергия $E_к$ – энергия движения. Потенциальная энергия $E_п$ – энергия взаимодействия тел или частиц тела, зависящая от их взаимного расположения.

Работа, совершаемая консервативными силами при изменении конфигурации системы, не зависит от того, как было осуществлено это изменение, и определяется только начальной и конечной конфигурациями системы:

$$A_{12} = E_{п1} - E_{п2}, \tag{1.6.4}$$

здесь потенциальная энергия $E_п$ (x, y, z) – *функция состояния системы, зависящая только от координат всех тел системы в поле консервативных сил.* Из формулы (1.6.4) следует, что работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии: $\mathrm{d}A = -\mathrm{d}E_п$.

Нет единого выражения для $E_п$. В разных случаях она определяется по-разному.

Потенциальная энергия при гравитационном взаимодействии

Работа тела при падении $A = mgh$, или $A = E_п - E_{п0}$. Условились считать, что на поверхности Земли ($h = 0$) $E_{п0} = 0$, тогда $E_п = A$, т. е.

$$E_п = mgh. \tag{1.6.5}$$

Для случая гравитационного взаимодействия между массами M и m, находящимися на расстоянии r друг от друга, потенциальную энергию можно найти по формуле

$$E_п = -\gamma \frac{Mm}{r}. \tag{1.6.6}$$

На рис. 1.6.4 изображена диаграмма потенциальной энергии гравитационного притяжения масс M и m. Здесь полная энергия $E = E_к + E_п$. Отсюда кинетическая энергия $E_к = E - E_п$.

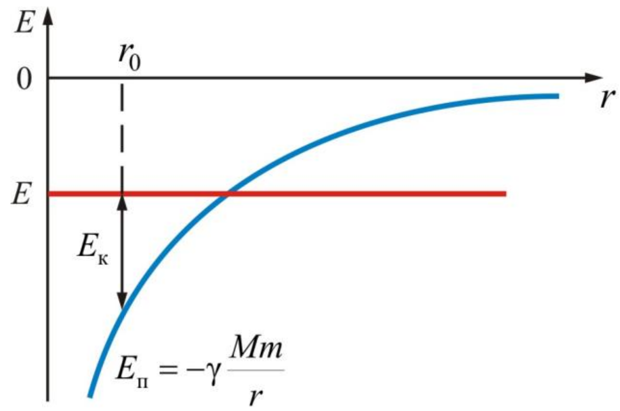


Рис. 1.6.4. Диаграмма потенциальной энергии гравитационного притяжения масс M и m: полная энергия $E = E_к + E_п$

Потенциальная энергия упругой деформации (пружины, стержня)

Найдем работу, совершаемую при деформации упругой пружины.

Сила упругости $F_{упр} = -kx$, где k – коэффициент упругости. Сила непостоянна, поэтому элементарная работа $\mathrm{d}A = F\mathrm{d}x = -kx\mathrm{d}x$ (знак минус говорит о том, что работа совершена над пружиной). Тогда

$$A = \int \mathrm{d}A = -\int_{x_1}^{x_2} kx\mathrm{d}x = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}, \tag{1.6.7}$$

т. е. $A = E_{п1} - E_{п2}$. Примем $E_{п2} = 0$, $E_{п1} = E_п$, тогда

$$E_п = \frac{kx^2}{2}. \tag{1.6.8}$$

На рис. 1.6.5 показана диаграмма потенциальной энергии пружины.

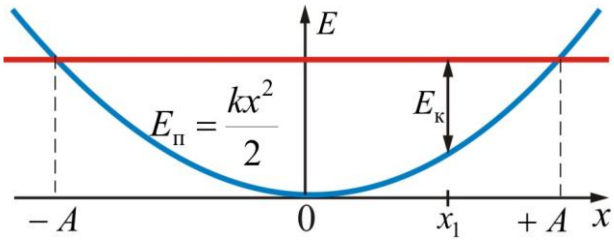


Рис. 1.6.5. Диаграмма потенциальной энергии пружины:
полная энергия $E = E_к + E_п$

Здесь $E = E_к + E_п$ – полная механическая энергия системы, $E_к$ – кинетическая энергия в точке x_1, $E_к = E - E_п$.

Связь между потенциальной энергией и силой

Пространство, в котором действуют консервативные силы, называется ***потенциальным полем.*** Каждой точке потенциального поля соответствует некоторое значение силы $\vec{F}$, действующей на тело, и некоторое значение потенциальной энергии $E_п$. Значит, между силой $\vec{F}$ и $E_п$ должна быть связь.

Известно, что $dA = \vec{F}d\vec{r}$; с другой стороны, $dA = -dE_п$, следовательно, $\vec{F}d\vec{r} = -dE_п$, тогда

$$\vec{F} = -\frac{dE_п}{d\vec{r}}. \qquad (1.6.9)$$

Для компонент силы по осям x, y, z можно записать, что

$$F_x = -\frac{\partial E_п}{\partial x};\ F_y = -\frac{\partial E_п}{\partial y};\ F_z = -\frac{\partial E_п}{\partial z}.$$

Так как вектор силы $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$, то получим

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_п}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_п}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_п}{\partial z}\vec{k}\right) = -\nabla E_п = -\mathrm{grad}E_п, \qquad (1.6.10)$$

где ∇ – оператор Гамильтона (оператор набла), $\mathrm{grad} = \dfrac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$

Градиент – это вектор, показывающий направление наибыстрейшего увеличения функции. Знак «–» показывает, что вектор $\vec{F}$ направлен в сторону наибыстрейшего уменьшения $E_п$.

Следовательно, *консервативная сила равна градиенту потенциальной энергии, взятому со знаком минус*: $\vec{F} = -\mathrm{grad}E_п$.

1.6.4. Закон сохранения механической энергии

В 40-х гг. XIX в. трудами Р. Майера, Г. Гельмгольца и Дж. Джоуля был доказан закон сохранения и превращения энергии.

Рассмотрим систему, состоящую из N частиц. Силы взаимодействия между частицами ($\vec{F}^{\text{âí óòð}}$) – консервативные. Кроме внутренних сил, на частицы действуют внешние консервативные и неконсервативные силы, т. е. рассматриваемая система частиц или тел консервативна. Тогда полная энергия этой системы

$$E = K + U_{\text{внутр}} + U_{\text{внеш}} = \text{const}. \tag{1.6.11}$$

Для механической энергии ***закон сохранения*** звучит так: *полная механическая энергия консервативной системы материальных точек остается постоянной*.

Для *замкнутой системы*, т. е. для системы, на которую не действуют внешние силы, можно записать:

$$E = K + U_{\text{внутр}} = \text{const}, \tag{1.6.12}$$

т. е. ***полная механическая энергия*** замкнутой системы материальных точек, между которыми действуют только консервативные силы, *остается постоянной*.

Если в замкнутой системе действуют неконсервативные силы, то полная механическая энергия системы не сохраняется – частично она переходит в другие виды энергии, неконсервативные.

Система, в которой механическая энергия переходит в другие виды энергии, называется ***диссипативной***, сам процесс перехода называется ***диссипацией энергии***.

В диссипативной, изолированной от внешнего воздействия системе остается постоянной сумма всех видов энергии (механической, тепловой и т. д.) Здесь действует общий закон сохранения энергии.

1.6.5. Условие равновесия механической системы

Механическая система будет находиться в ***равновесии****, если на нее не будет действовать сила*. Это условие *необходимое*, но *не достаточное,* т. к. система может при этом находиться в равномерном и прямолинейном движении.

Мерой устойчивости тела в положении равновесия является *наименьшее значение работы*, совершаемой внешней силой для того, чтобы переместить тело в такое положение, откуда после действия силы оно уже не сможет вернуться в исходное состояние.

Из двух тел *более устойчивым* является тело, для выведения которого из положения равновесия требуется совершение *большей работы*.

Рассмотрим пример, изображенный на рис. 1.6.6 и рис. 1.6.7 (Земля – шарик, скользящий без трения по изогнутой проволоке). В этом случае взаимное расположение тел системы может быть определено с помощью одной величины – координаты x.

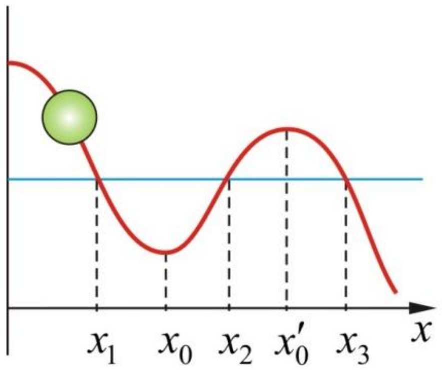


Рис. 1.6.6. Система Земля – шарик, скользящий без трения по проволоке

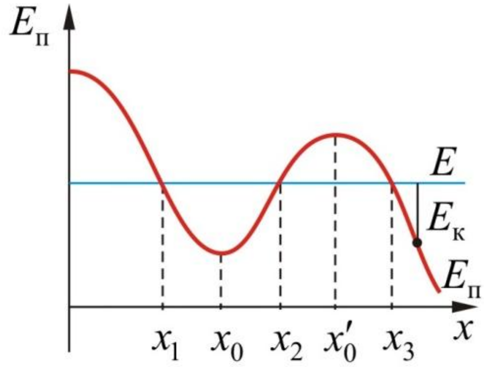


Рис. 1.6.7. Полная, кинетическая и потенциальная энергия системы

И так, по определению, $F_x = 0$ – условие равновесия системы. Из (6.3.7) имеем $\left|\vec{F}_x\right| = -\dfrac{\partial E_{п}}{\partial x}$. Следовательно, при $\dfrac{\partial E_{п}}{\partial x} = 0$ система будет находиться в состоянии равновесия.

Именно так находят положение точек экстремума.

$$\frac{\partial E_{п}}{\partial x} = 0 \text{ при } x = x_0 \text{ и } x = x_0':$$

- при x_0' $E_{п} = \max$ – состояние неустойчивого равновесия;
- при x_0 $E_{п} = \min$ – система находится в устойчивом равновесии.

Следовательно, *достаточным условием равновесия является равенство минимуму значения* $E_{п}$ (это справедливо не только для механической системы, но, например, и для атома).

Область между x_1 и x_2, в которой частица оказывается запертой, на*зывается потенциальной ямой*, а область между x_2 и x_3, через которую частица не может пройти, называется потенциальным барьером. В классической механике потенциальный барьер является абсолютным для движения частицы. В квантовой механике при определенных условиях частица может пройти через потенциальный барьер. Это явление называется туннельным эффектом и играет важную роль в микромире. Более подробно этот эффект рассматривается в квантовой механике.

1.6.6. Применение законов сохранения

Абсолютно упругий центральный удар

При ***абсолютно неупругом ударе*** закон сохранения механической энергии не работает.

Применим закон сохранения механической энергии для расчета скорости тел при ***абсолютно упругом ударе*** – *ударе, при котором не происходит превращения механической энергии в другие виды энергии*.

На рис. 1.6.7 изображены два шара – m_1 и m_2. Скорости шаров $\vec{\upsilon}_1 > \vec{\upsilon}_2$, поэтому, хотя скорости и направлены в одну сторону, все равно будет удар. Систему можно считать замкнутой. Кроме того, при абсолютно упругом ударе она консервативна.

Обозначим $\vec{\upsilon}'_1$ и $\vec{\upsilon}'_2$ как скорость шаров после их столкновения.

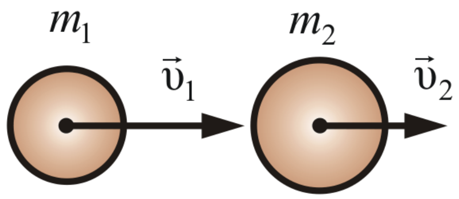


Рис. 1.6.7. Упругий центральный удар шаров массами m_1 и m_2

В данном случае можно воспользоваться законом сохранения механической энергии и законом сохранения импульса (в проекциях на ось x):

$$\begin{cases} \dfrac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \dfrac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \dfrac{m_1\upsilon'^2_1}{2} + \dfrac{m_2\upsilon'^2_2}{2}; \\ m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon'_1 + m_2\upsilon'_2. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений относительно υ'_1 и υ'_2, получим

$$\upsilon'_1 = \frac{2m_2\upsilon_2 + (m_1 - m_2)\upsilon_1}{m_1 + m_2};$$

$$\upsilon'_2 = \frac{2m_1\upsilon_1 + (m_2 - m_1)\upsilon_2}{m_1 + m_2}.$$

Таким образом, скорости шаров после абсолютно упругого удара не могут быть одинаковыми по величине и по направлению.

Рассмотрим теперь *абсолютно упругий удар шара о неподвижную массивную стенку*.

Стенку можно рассматривать как неподвижный шар с $\upsilon_2 = 0$, массой $m_2 \to \infty$. Разделим числитель и знаменатель на m_2 и пренебрежем m_1 / m_2, тогда

$$\upsilon'_1 = \frac{2\upsilon_2 - \upsilon_1}{1}, \text{ т. е. } \upsilon'_1 = -\upsilon_1.$$

Таким образом, шар m_1 изменит направление скорости на противоположное.

Абсолютно неупругий удар

Абсолютно неупругий удар – это столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются и двигаются дальше как единое целое.

Продемонстрировать абсолютно неупругий удар можно с помощью шаров из пластилина (глины), движущихся навстречу друг другу.

Если массы шаров – m_1 и m_2, их скорости до удара – υ_1 и υ_2, то, используя закон сохранения импульса, можно записать:

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)\upsilon, \qquad (1.6.13)$$

где $\vec{\upsilon}$ – скорость движения шаров после удара. Тогда

$$\upsilon = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}. \qquad (1.6.14)$$

Если шары двигались навстречу друг другу, то они вместе будут продолжать двигаться в ту сторону, в которую двигался шар, обладающий большим импульсом. В частном случае, если массы и скорости шаров равны, то

$$\upsilon = \frac{\upsilon_1 - \upsilon_2}{2} = 0.$$

Выясним, как меняется кинетическая энергия шаров при центральном абсолютно неупругом ударе. Так как в процессе соударения шаров между ними действуют силы, зависящие не от самих деформаций, а от их скоростей, то мы имеем дело с силами, подобными силам трения, поэтому закон сохранения механической энергии не должен соблюдаться. Вследствие деформации происходит «потеря» кинетической энергии, перешедшей в тепловую Q или другие формы энергии (диссипация энергии). Эту «потерю» можно определить по разности кинетических энергий до и после удара:

$$\Delta K = \left(\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2}\right) - \frac{(m_1 + m_2)\upsilon^2}{2} = Q;$$

$$\Delta K = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}\left(\upsilon_1 - \upsilon_2\right)^2. \qquad (1.6.15)$$

Если ударяемое тело было первоначально неподвижно ($\upsilon_2 = 0$), то

$$\upsilon = \frac{m_1 \upsilon_1}{m_1 + m_2}, \quad \Delta K = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\frac{m_1 \upsilon_1^2}{2}.$$

Когда $m_2 >> m_1$ (масса неподвижного тела очень большая), то $\upsilon << \upsilon_1$ и почти вся кинетическая энергия при ударе переходит в другие формы энергии. Поэтому, например, для получения значительной деформации наковальня должна быть массивнее молотка. Когда $m_2 \approx m_1$, тогда $\upsilon \approx \upsilon_1$ и практически вся энергия затрачивается на возможно большее перемещение, а не на остаточную деформацию (например, молоток – гвоздь).

Абсолютно неупругий удар – пример того, как происходит «потеря» механической энергии под действием диссипативных сил.

Знакомство с конкретными примерами позволяет сформулировать важные ***общие положения относительно законов сохранения***.

Законы сохранения носят фундаментальный характер и тесно связаны с симметрией пространства и времени:

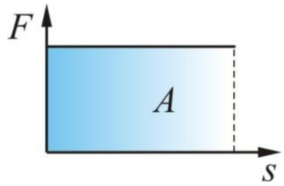
- Закон сохранения энергии связан с однородностью времени, т. е. равнозначностью всех моментов времени.
- Закон сохранения импульса связан с однородностью пространства, т. е. равнозначностью всех точек пространства.

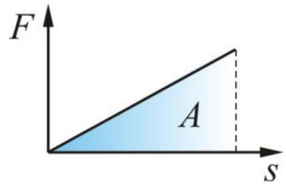
Законы сохранения носят общий характер и не зависят от конкретной системы и ее движения. Из законов сохранения вытекает, что какие-то процессы заведомо оказываются невозможными. Так, в 1775 г. Французская Академия решила не принимать к рассмотрению проекты вечных двигателей как противоречащие закону сохранения энергии.

Законы сохранения позволяют рассмотреть общие свойства движения без решения уравнений и детальной информации о протекании процессов во времени. Поэтому законы сохранения могут быть использованы даже в тех случаях, когда силы точно не известны. Так, в частности, обстоит дело в физике элементарных частиц. Даже в тех случаях, когда силы заданы в точности, законы сохранения могут оказать существенную помощь при решении задач о движении частиц.

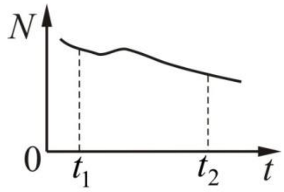
Контрольные вопросы. Упражнения

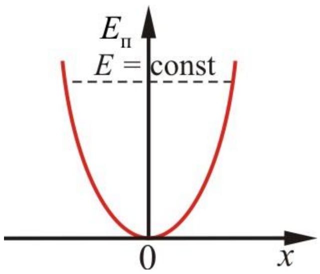
1. В чем различие между понятиями энергии и работы?
2. Как найти работу переменной силы?
3. Какую работу совершает равнодействующая всех сил, приложенных к телу, равномерно движущемуся по окружности?
4. Что такое мощность? Выведите ее формулу.
5. Дайте определения и выведите формулы для известных видов механической энергии.
6. Какова связь между силой и потенциальной энергией?
7. Чем обусловлено изменение потенциальной энергии?
8. Необходимо ли условие замкнутости системы для выполнения закона сохранения механической энергии?
9. В чем заключается закон сохранения механической энергии? Для каких систем он выполняется?
10. В чем физическая сущность закона сохранения и превращения энергии? Почему он является фундаментальным законом природы?
11. Что такое потенциальная яма? Потенциальный барьер?
12. Какие заключения о характере движения тел можно сделать из анализа потенциальных кривых?
13. Как охарактеризовать положения устойчивого и неустойчивого равновесия?
14. Чем отличается абсолютно упругий удар от абсолютно неупругого?
15. Как определить скорости тел после центрального абсолютно упругого удара? Следствием каких законов являются эти выражения?
16. Может ли быть отрицательной кинетическая энергия? Потенциальная энергия?
17. Можно ли на основе закона сохранения ответить на вопрос о том, как будет происходить то или иное движение?
18. Можно ли на основе законов сохранения высказать суждение о принципиальной возможности или невозможности того или иного движения точки?
19. В каком случае закон сохранения импульса можно применить к неизолированной системе?
20. На систему биллиардных шаров, движущихся по горизонтальному столу, действует сила трения, и поэтому эта система в отношении горизонтальных движений не является изолированной. Можно ли применять закон сохранения импульса к столкновению шаров? Почему?
21. На рисунке закрашенные площади определяют совершенную работу. Что можно сказать о силах, действующих на тела?





22. На рисунке приведен график зависимости мощности двигателя от времени. Как по графику можно определить совершенную двигателем работу за время $t = t_2 - t_1$?





23. На рисунке представлен график зависимости потенциальной энергии упруго деформированной пружины от деформации. Полная механическая энергия пружины не меняется при изменении положения пружины (на графике – горизонтальная прямая E = const). Используя данный график, начертите зависимость кинетической энергии упругодеформированной пружины от деформации.

1.7. Динамика вращательного движения твердого тела

Любое движение твердого тела сводится к поступательному и вращательному. Это означает, что произвольное движение можно представить в виде суперпозиции поступательного движения тела, характеризуемого движением любой его точки (центра масс), и вращения тела вокруг этой точки (т. е. вокруг осей, проходящих через нее).

1.7.1. Вращательное движение твердого тела относительно точки

Рассмотрим твердое тело как некую систему (рис. 1.7.1), состоящую из n точек (m_1 m_2 ... m_n); $\vec{r}_i$ – радиус-вектор i-й точки, проведенный из точки O – центра неподвижной инерциальной системы отсчета. Обозначим $\vec{F}_i$ – внешняя сила, действующая на i-ю точку, $\vec{F}_{ik}$ – сила действия со стороны k-й точки на i-ю.

Запишем основное уравнение динамики для точки:

$$\frac{d}{dt}\left(m_i\vec{\upsilon}_i\right) = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}\vec{F}_{ik} + \vec{F}_i.$$

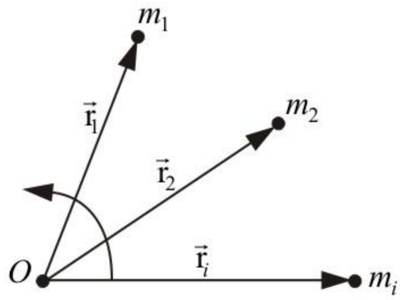


Рис. 1.7.1. Вращение системы материальных точек вокруг точки О – центра неподвижной инерциальной системы отсчета

Умножим обе части этого уравнения векторно на $\vec{r}_i$:

$$\left[\vec{r}_i, \frac{d}{dt}(m_i\vec{\upsilon}_i)\right] = \left[\vec{r}_i, \sum_k \vec{F}_{ik}\right] + \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i\right].$$

Знак производной можно вынести за знак векторного произведения (и знак суммы тоже), тогда

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_i, m_i\vec{\upsilon}_i\right] = \sum_k \left[\vec{r}_i, \vec{F}_{ik}\right] + \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i\right].$$

Векторное произведение $\vec{r}_i$ *точки на ее импульс называется* ***моментом импульса*** (***количества движения***) $\vec{L}_i$ *этой точки относительно точки О*:

$$\vec{L}_i = \left[\vec{r}_i, m_i\vec{\upsilon}_i\right], \text{ или } \vec{L} = \left[\vec{r}_i, \vec{p}_i\right]. \qquad (1.7.1)$$

Для материальной точки массой m момент импульса

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \left[\vec{r}, \vec{p}\right].$$

Три вектора в (1.7.1) образуют правую тройку векторов, связанных «правилом буравчика» (рис. 1.7.2).

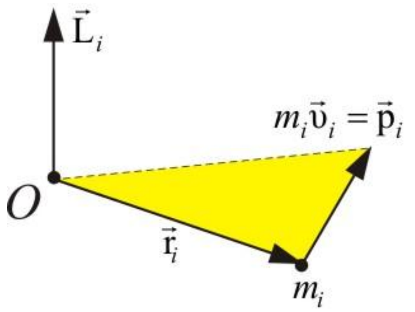


Рис. 1.7.2. Три взаимно перпендикулярных вектора $\vec{L} = \left[\vec{r}_i, \vec{p}_i\right]$; $L_i = p_i r_i$

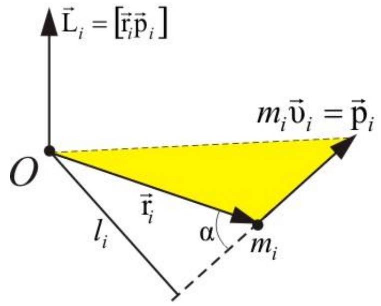


Рис. 1.7.3. Величина момент импульса $\left|\vec{L}_i\right| = L_i = p_i r_i \sin\alpha = pl$

Направление вектора $\vec{L}_i$ ортогонально плоскости, в которой лежат векторы $\vec{r}_i$ è $\vec{p}_i$, а величина этого вектора

$$\left|\vec{L}_i\right| = L_i = p_i r_i \sin\alpha = pl, \qquad (1.7.2)$$

где $l = r\sin\alpha$ – плечо импульса (рис. 1.7.3).

Векторное произведение $\vec{r}_i$, *проведенного в точку приложения силы, на эту силу называется* ***моментом силы*** $\vec{M}_i$ (рис. 1.7.4):

$$\vec{M}_i = [\vec{r}_i, \vec{F}_i]. \qquad (1.7.3)$$

Пусть l_i – плечо силы F_i, (рис. 1.7.5). Так как $\sin(180-\alpha) = \sin\alpha$, то

$$\left|\vec{M}_i\right| = M_i = F_i r_i \sin\alpha = F_i l_i. \qquad (1.7.4)$$

С учетом новых обозначений

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_{ik} + \vec{M}_i.$$

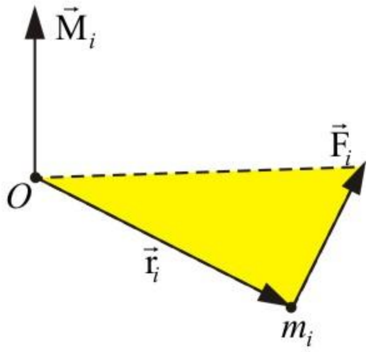


Рис. 1.7.4. Момент силы $\vec{M}_i = [\vec{r}_i, \vec{F}_i]$

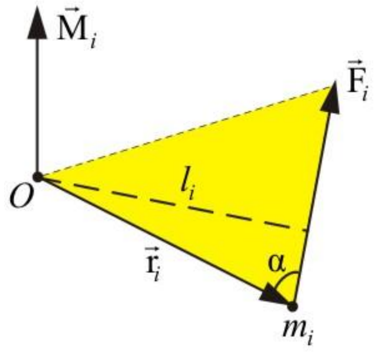


Рис. 1.7.5. Модуль момента силы $\left|\vec{M}_i\right| = M_i = F_i r_i \sin\alpha = F_i l_i$

Запишем систему n уравнений для всех точек системы и сложим их левые и правые части:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\vec{L}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \vec{M}_{ik} + \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i.$$

Здесь сумма производных равна производной суммы

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\vec{L}_i}{\mathrm{d}t},$$

где $\vec{L}$ – момент импульса системы, $\vec{M}$ – результирующий момент всех внешних сил относительно точки O.

Так как

$$\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}\text{, то } \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\vec{M}_{ik} = 0.$$

Отсюда получим ***основной закон динамики вращательного движения твердого тела, вращающегося вокруг точки***.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{\text{внеш}}. \qquad (1.7.5)$$

Это выражение называется ***уравнением моментов***.

Момент импульса системы $\vec{L}$ является основной динамической характеристикой вращающегося тела.

Из сравнения этого уравнения с основным уравнением динамики поступательного движения

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$$

видно их внешнее сходство.

1.7.2. Вращательное движение твердого тела относительно оси

Описанное нами движение твердого тела относительно неподвижной точки является основным видом движения. Однако вычислить вектор $\vec{L}$ – момент импульса системы относительно произвольной точки – непросто: надо знать шесть проекций (три задают положение тела, три задают положение точки).

Значительно проще найти момент импульса $\vec{L}$ тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z (рис. 1.7.6). В этом случае составляющие $\vec{M}$ – момента внешних сил, направленные вдоль x и y, *компенсируются моментами сил реакции закрепления*. Вращение вокруг оси z происходит только под действием $\vec{M}_z$.

Пусть некоторое тело вращается вокруг оси z (рис. 1.7.7).

Получим уравнение динамики для некоторой точки m_i этого тела, находящегося на расстоянии R_i от оси вращения,

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_i\text{, или } \frac{d}{dt}[\vec{R}, m_i\vec{\upsilon}] = \vec{M}_i.$$

Поскольку $\vec{\upsilon}_i$ у всех точек разная, введем вектор угловой скорости $\vec{\omega}$, причем $\omega = \dfrac{\upsilon}{R}$. Тогда $\dfrac{d}{dt}\left(m_i R_i^2 \vec{\omega}\right) = \vec{M}_i$.

Так как тело абсолютно твердое, то в процессе вращения m_i и R_i останутся неизменными. Тогда

$$m_i R_i^2 \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathrm{M}}_i. \qquad (1.7.6)$$

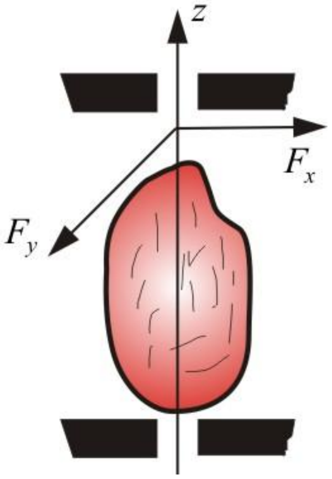


Рис. 1.7.6. Вращение произвольного тела относительно неподвижной оси z

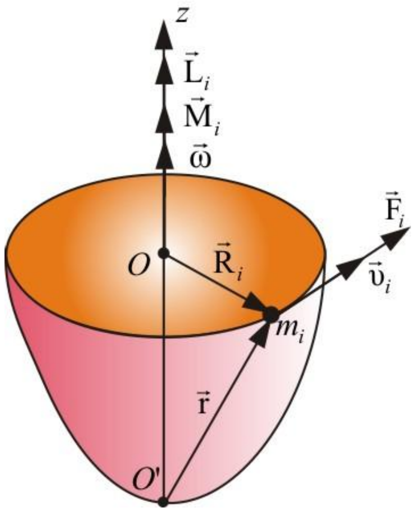


Рис. 1.7.7. Вращение твердого тела под действием $\vec{\mathrm{M}}_z$

Пусть J_i – ***момент инерции*** точки массой m_i, находящейся на расстоянии R_i от оси вращения,

$$J_i = m_i R_i^2. \qquad (1.7.7)$$

Момент инерции *тела служит* ***мерой инертности*** *при вращательном движении*, так же как масса – мера инертности при поступательном движении.

В общем случае тело состоит из огромного количества точек, и все они находятся на разных расстояниях от оси вращения. *Момент инерции* системы (тела) равен:

$$J_i = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2.$$

В случае непрерывного распределения масс

$$J = \int_0^m R^2 \mathrm{d}m = \int_0^V \rho R^2 \mathrm{d}V, \qquad (1.7.8)$$

где ρ – плотность тела; dV – объем малого элемента тела массы dm, отстоящего от оси вращения на расстоянии R.

Просуммировав выражение (1.7.6) по всем i-м точкам, получим $J\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}$, или

$$J\vec{\varepsilon} = \vec{M}. \qquad (1.7.9)$$

Это ***основное уравнение динамики тела***, ***вращающегося вокруг неподвижной оси***. (Сравним: $m\vec{a} = \vec{F}$ – основное уравнение динамики поступательного движения тела).

Для ***момента импульса*** $\vec{L}$ тела, вращающегося вокруг оси z, имеем:

$$J d\vec{\omega} = \vec{M} dt;\ J d\vec{\omega} = d\vec{L};$$

$$\vec{L} = J\vec{\omega}. \qquad (1.7.10)$$

(Сравним: $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ – для поступательного движения).

При этом помним, что $\vec{L}$ и $\vec{M}$ – динамические характеристики вращательного движения, направленные всегда вдоль оси вращения. Причем $\vec{L}$ определяется направлением вращения, как и $\vec{\omega}$, а направление $\vec{M}$ зависит от того, ускоряется или замедляется вращение.

1.7.3. Расчет моментов инерции некоторых тел. Теорема Штейнера

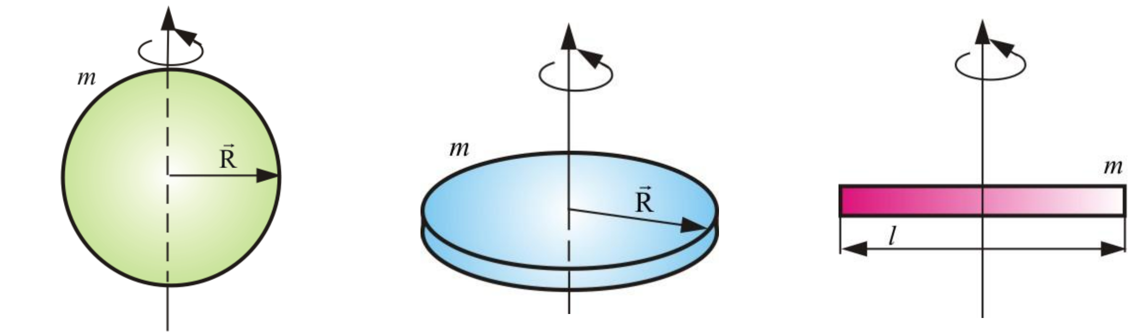
По формуле (1.7.8) не всегда просто удается рассчитать момент инерции тел произвольной формы.

Наиболее легко эта задача решается для тел простых форм, вращающихся вокруг оси, проходящей через центр инерции тела C (рис. 1.7.8). В этом случае при вычислении J_C по формуле (1.7.7), появляется коэффициент k: $J_c = kmR^2$.

При вычислении момента инерции тела, вращающегося вокруг оси, не проходящей через центр инерции (рис. 1.7.9), следует пользоваться *теоремой о параллельном переносе осей, или* ***теоремой Штейнера*** (*Якоб Штейнер, швейцарский геометр*, 1796–1863 гг.):

$$J = J_c + md^2. \qquad (1.7.11)$$

Момент инерции тела J относительно любой оси вращения равен моменту его инерции J_C относительно параллельной оси, проходящей через центр масс C тела, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между осями.



Шар
$k = \frac{2}{5}$; $J_c = \frac{2}{5} mR^2$;
Сфера $J_c = \frac{2}{3} mR^2$;

Диск
$k = \frac{1}{2}$; $J_c = \frac{1}{2} mR^2$;
Обруч $J_c = mR^2$;

Стержень
$k = \frac{1}{12}$;
$J_c = \frac{1}{12} ml^2$.

Рис. 1.7.8. Моменты инерции шара, диска, стержня

С помощью теоремы Штейнера, например, можно легко рассчитать момент инерции стержня массой m, длиной l, вращающегося вокруг оси, которая проходит через конец стержня (рис. 1.7.10).

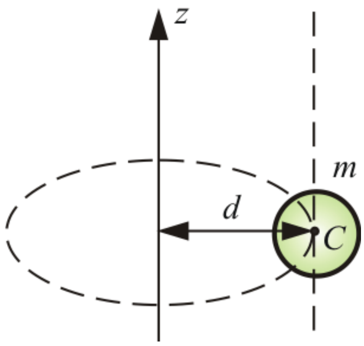


Рис. 1.7.9. К теореме Штейнера

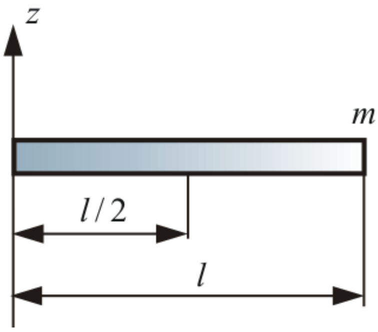


Рис. 1.7.10. К расчету момента инерции стержня

Момент инерции стержня, вращающегося вокруг оси, проходящей через его центр,

$$J_c = \frac{1}{12} ml^2,$$

тогда

$$J_z = J_c + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} ml + \frac{1}{4} ml^2 = \frac{1}{3} ml^2.$$

1.7.4. Кинетическая энергия вращающегося тела

Кинетическая энергия – величина аддитивная. Поэтому кинетическая энергия тела, движущегося произвольным образом, равна сумме кинетических энергий всех n материальных точек, на которые это тело можно мысленно разбить:

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \upsilon_i^2}{2}. \tag{1.7.12}$$

Если тело вращается вокруг неподвижной оси z с угловой скоростью $\vec{\omega}$, то линейная скорость i-й точки $\vec{\upsilon}_i = \vec{\omega} R_i$, R_i – расстояние до оси вращения. Следовательно,

$$K_{\text{вращ}} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 = \frac{J\omega^2}{2}. \tag{1.7.13}$$

Сопоставив формулы (1.7.12) и (1.7.13), можно увидеть, что момент инерции тела J является *мерой инертности при вращательном движении*, так же как масса m – *мера инерции при поступательном движении*.

В общем случае движение твердого тела можно представить в виде суммы двух движений – поступательного со скоростью υ_c и вращательного с угловой скоростью ω вокруг мгновенной оси, проходящей через центр инерции. Тогда полная кинетическая энергия этого тела

$$K_{\text{полн}} = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2}. \tag{1.7.14}$$

Здесь J_c – момент инерции относительно мгновенной оси вращения, проходящей через центр инерции.

1.7.5. Закон сохранения момента импульса

Для замкнутой системы тел момент внешних сил $\vec{\Gamma}$ всегда равен нулю, т. к. внешние силы вообще не действуют на замкнутую систему.

Поэтому $\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathrm{M}} \equiv 0$, т. е. $\vec{\mathrm{L}} = \mathrm{const}$, или

$$J\vec{\omega} = \mathrm{const}.$$

Закон сохранения момента импульса: *момент импульса замкнутой системы тел относительно любой неподвижной точки* ***не изменяется*** *с течением времени.*

Это один из фундаментальных законов природы.

Аналогично для замкнутой системы тел, вращающихся вокруг оси z,

$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = \vec{M}_z \equiv 0, \text{ отсюда } \vec{L}_z = \text{const}, \text{ или } J_z\vec{\omega} = \text{const}.$$

Если момент внешних сил относительно неподвижной оси вращения тождественно равен нулю, то момент импульса относительно этой оси не изменяется в процессе движения.

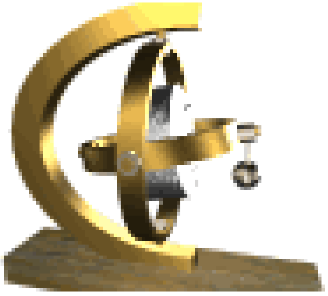
Момент импульса и для незамкнутых систем постоянен, если результирующий момент внешних сил, приложенных к системе, равен нулю.

Закон сохранения момента импульса является прямым следствием законов Ньютона и изотропности пространства – эквивалентности свойств пространства в различных направлениях.

Существует множество различных задач, связанных с вращающимися системами, в которых скорости вращения или моменты импульса можно вычислить с помощью закона сохранения момента импульса.

Очень нагляден закон сохранения момента импульса в опытах с уравновешенным ***гироскопом*** – *быстро вращающимся телом, имеющим три степени свободы*.

Гироскоп на кардановом подвесе (как это изображено на рис. 1.7.11) не испытывает действия момента в результате вращения Земли или в результате движения самолета, на котором он укреплен. Поэтому ось вращающегося тела всегда будет сохранять определенное направление в пространстве. Следует указать, что в гироскопах всегда применяются симметричные вращающиеся тела для того, чтобы ось вращения могла совпадать с направлением вектора момента импульса.



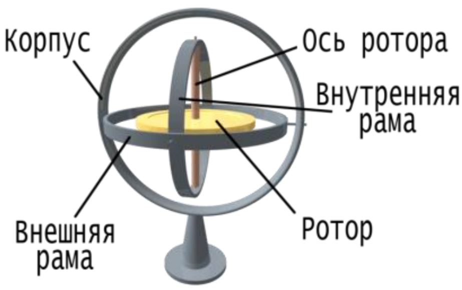


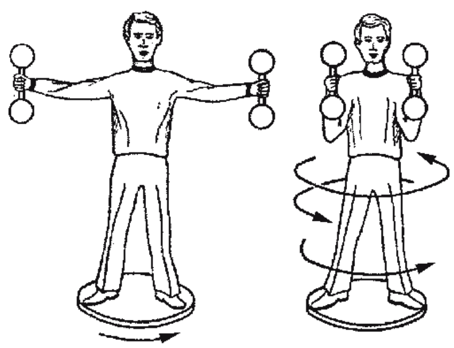
Рис. 1.7.11. Гироскоп на кардановом подвесе

При использовании гирокомпасов применяются различные способы их крепления. Вращение Земли создает момент, действующий на вращающееся тело, за исключением случая, когда ось вращения тела направлена на север.

На свойствах гироскопа основаны разнообразные устройства или приборы, широко применяющиеся в авиации, морском флоте, ракетной и космической технике для решения разнообразных навигационных задач, управления подвижными объектами, их стабилизации в пространстве, а также при выполнении топографических и геодезических работ.

Одно из важных применений гироскопа – поддержание заданного направления движения транспортных средств, например, судна (авторулевой) или самолета (автопилот) и т. д. При всяком отклонении от курса, вследствие каких-то воздействий, положение оси гироскопа в пространстве сохраняется. Следовательно, ось гироскопа вместе с рамами карданова подвеса поворачивается относительно движущегося устройства.

Именно закон сохранения момента импульса используется танцорами на льду для изменения скорости вращения. Или еще известный пример – скамья Жуковского (рис. 1.7.12).



$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2;\ J_1 > J_2;\ \omega_1 < \omega_2$$

Рис. 1.7.12. Скамья Жуковского

1.7.6. Законы сохранения и их связь с симметрией пространства и времени

В предыдущих разделах рассмотрены три фундаментальных закона природы: закон сохранения импульса, момента импульса и энергии. Следует понимать, что эти законы выполняются только в инерциальных системах отсчета.

Во всей истории развития физики законы сохранения оказались чуть ли не единственными законами, сохранившими свое значение при замене одних теорий другими. ***Эти законы являются следствием симметрии пространства-времени*:**

- ***В основе закона сохранения энергии лежит однородность времени***, т. е. *равнозначность всех моментов времени* (симметрия по отношению к сдвигу начала отсчета времени). Равнозначность следует понимать в том смысле, что замена момента времени t_1 на момент времени t_2, без изменения значений координат и скорости частиц, не изменяет механические свойства системы.

- ***В основе закона сохранения импульса лежит однородность пространства***, т. е. *одинаковость свойств пространства во всех точках* (симметрия по отношению к сдвигу начала координат). Одинаковость следует понимать в том смысле, что параллельный перенос замкнутой системы из одного места пространства в другое без изменения взаимного расположения и скоростей частиц не изменяет механические свойства системы.
- ***В основе закона сохранения момента импульса*** лежит ***изотропия пространства***, т. е. *одинаковость свойств пространства по всем направлениям* (симметрия по отношению к повороту осей координат). Одинаковость следует понимать в том смысле, что поворот замкнутой системы как целого не отражается на ее механических свойствах.

И, наконец, следует сказать ***о симметрии классической механики*** по отношению к направлению хода времени t – его возрастанию или убыванию. Формально это следует из инвариантности уравнений механики по отношению к замене переменной t на $-t$.

Между законами типа основного уравнения динамики и законами сохранения имеется принципиальная разница. Законы динамики дают нам представление о детальном ходе процесса. Так, если задана сила, действующая на материальную точку и начальные условия, то можно найти закон движения, траекторию, величину и направление скорости в любой момент времени и т. п. Законы же сохранения не дают нам прямых указаний на то, как должен идти тот или иной процесс. Они говорят лишь о том, какие процессы запрещены и потому в природе не происходят.

Таким образом, законы сохранения проявляются как ***принципы запрета***: *любое явление, при котором не выполняется хотя бы один из законов сохранения, запрещено, и в природе такие явления никогда не наблюдаются. Всякое явление, при котором не нарушается ни один из законов сохранения, в принципе может происходить.*

Фундаментальность законов сохранения заключается в их универсальности. Они справедливы при изучении любых физических процессов (механических, тепловых, электромагнитных и др.). Они одинаково применимы в релятивистском и нерелятивистском движении, в микромире, где справедливы квантовые представления, и в макромире с его классическими представлениями.

1.7.7. Связь между линейными и угловыми величинами

Основные величины и уравнения кинематики и динамики вращательного движения легко запоминаются, если сопоставить их с величинами и уравнениями поступательного движения (табл. 1.7.1).

Таблица 1.7.1

Поступательное движение		Вращательное движение	
Кинематика			
Путь	$s=\int_0^t \upsilon \mathrm{d}t;$ $s=\upsilon_0 t\pm\frac{at^2}{2}$	Угол поворота	$\varphi=\int_0^t \omega \mathrm{d}t;$ $\varphi=\omega_0 t\pm\frac{\varepsilon t^2}{2}$
Скорость	$\upsilon=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t};$ $\upsilon=\upsilon_0\pm at$	Угловая скорость	$\omega=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t};$ $\omega=\omega_0\pm\varepsilon t$
Ускорение	$a=\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}$	Угловое ускорение	$\varepsilon=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$
$s=R\varphi;\quad \upsilon=R\omega;\quad \vec{a}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_n;\quad a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2};\quad a_n=\upsilon^2/R=\omega^2 R;\quad a_\tau=R\cdot\varepsilon$			
Динамика			
Масса	m	Момент инерции	J
Основное уравнение динамики поступательного движения	$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}t}=\vec{\mathrm{F}};$ $m\vec{a}=\vec{\mathrm{F}}$	Основное уравнение динамики вращательного движения	$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t}=\vec{\mathrm{M}};$ $J\vec{\varepsilon}=\vec{\mathrm{M}}$
Импульс	$\vec{\mathrm{p}}=m\vec{\upsilon}$	Момент импульса	$\vec{\mathrm{L}}=J\vec{\omega}$
Закон сохранения импульса	$m\vec{\upsilon}=\mathrm{const}$	Закон сохранения момента импульса	$J\vec{\omega}=\mathrm{const}$
Работа	$A=F\cdot s$	Работа вращения	$A=M\cdot\varphi$
Мощность	$N=F\cdot\upsilon$	Мощность	$N=M\cdot\omega$
Кинетическая энергия	$E_{\hat{e}}=\frac{m\upsilon^2}{2}=\frac{P^2}{2m}$	Кинетическая энергия вращающегося тела	$E_{\text{к}}=\frac{J\omega^2}{2}=\frac{L^2}{2J}$
Энергия тела, катящегося с высоты h		$mgh=\frac{m\upsilon^2}{2}+\frac{J\omega^2}{2}$	
Потенциальная энергия сжатой пружины		$E_{\text{п}}=\frac{kx^2}{2}$	
Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия		$E_{\text{п}}=\gamma\frac{M\cdot m}{r};\ E_{\text{п}}=mgh$	

Контрольные вопросы. Упражнения

1. Что такое момент импульса материальной точки? Твердого тела? Как определяется направление вектора момента импульса?
2. Что называется моментом силы относительно неподвижной точки? Относительно неподвижной оси? Как определяется направление момента силы?
3. Что такое момент инерции тела?
4. Какова роль момента инерции во вращательном движении?
5. Выведите формулу для момента инерции обруча.
6. Сформулируйте и поясните теорему Штейнера.
7. Какова формула для кинетической энергии тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, и как ее вывести?
8. Выведите и сформулируйте уравнение динамики вращательного движения твердого тела.
9. В чем заключается физическая сущность закона сохранения момента импульса? В каких системах он выполняется? Приведите примеры.
10. Каким свойством симметрии пространства и времени обуславливается справедливость закона сохранения момента импульса?
11. В каком случае закон сохранения момента импульса можно применять к неизолированной системе?
12. Каким свойством пространства обуславливается справедливость закона сохранения момента импульса?
13. Какими физическими обстоятельствами обуславливается возможность применения закона сохранения момента импульса к неизолированной системе?
14. Твердое тело с моментом инерции J вращается с угловым ускорением ε вокруг своей оси и мгновенной угловой скоростью ω. Чему равна мощность, сообщенная телу?
15. Обод велосипедного колеса диаметром 0,8 м имеет массу 1,5 кг. Чему равен момент импульса колеса, если скорость велосипеда 3 м/с?
16. Где следует посадить ребенка массой 30 кг, чтобы уравновесить 4-метровые качели (масса отца – 80 кг, а матери – 50 кг)?

1.8. Теория тяготения Ньютона. Законы Кеплера

Все тела в природе взаимно притягивают друг друга. Это взаимодействие называется гравитационным и является одним из фундаментальных взаимодействий в природе. Мы знаем о нем очень мало, гораздо меньше, чем, например, об электромагнитном взаимодействии. Тем не менее, на уровне механики мы можем описать гравитацию.

1.8.1. Теория тяготения Ньютона

Классическая формулировка ***закона всемирного тяготения*** была дана И. Ньютоном в 1687 г. в его труде «Математические начала натуральной философии».

Согласно этому закону ***сила, с которой два тела притягиваются друг к другу, пропорциональна произведению масс этих тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними***:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{1.8.1}$$

где $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м$^2 \cdot$ кг$^{-2}$ – коэффициент пропорциональности, называемый ***гравитационной постоянной***.

Физический смысл гравитационной постоянной заключается в том, что она равна силе в $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н, с которой два тела массой 1 кг каждое, их центры отдалены на расстояние 1 м, взаимно притягиваются друг к другу.

Силы тяготения всегда являются силами притяжения и направлены вдоль прямой, проходящей через взаимодействующие тела.

В данном случае тела, о которых шла речь, представляют собой материальные точки. Для определения силы взаимодействия тел, которые не могут рассматриваться как материальные точки, их нужно разбить на элементарные массы Δm, каждую из которых можно было бы принять за материальную точку (рис. 1.8.1).

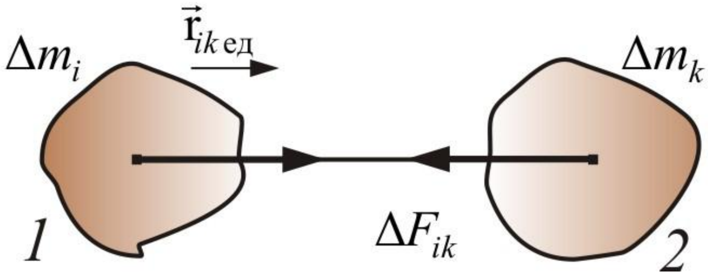


Рис. 1.8.1. К определению силы взаимодействия тел 1 и 2 произвольной формы

Тогда i-я элементарная масса тела *1* притягивается к k-й элементарной массе тела *2* с силой

$$\Delta\vec{\mathrm{F}}_{ik} = \frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^2}\vec{\mathrm{r}}_{ik\,\text{ед}}, \tag{1.8.2}$$

где $\vec{\mathrm{r}}_{ik\,\text{ед}}$ – единичный вектор (орт), направленный от Δm_i к Δm_k.

Просуммировав дважды последнее выражение по всем значениям индекса k и i, т. е. сложив силы, приложенные ко всем элементарным массам первого тела, получим результирующую всех сил, с которой тело *2* действует на тело *1*:

$$\vec{\mathrm{F}}_{12} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\gamma\frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^2}\vec{\mathrm{r}}_{ik\,\text{ед}}. \tag{1.8.3}$$

Практически суммирование сводится к интегрированию и является довольно сложной математической задачей.

Если взаимодействующие тела представляют собой *однородные шары*, то вычисление последней суммы приводит к следующему результату:

$$\vec{\mathrm{F}}_{12} = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{\mathrm{r}}_{12}, \tag{1.8.4}$$

где r – расстояние между центрами шаров; $\vec{\mathrm{r}}_{12}$ – единичный вектор, направленный от центра шара *1* к центру шара *2*.

Таким образом, в упрощенном варианте шары действуют как материальные точки, помещенные в их центры и имеющие их массы.

Если одно из тел представляет собой шар очень больших размеров радиуса R (Земной шар), а второе тело имеет размеры гораздо меньше R и находится вблизи поверхности большого шара, то их взаимодействие описывается последней формулой, где $r = R$ (рис. 1.8.2).

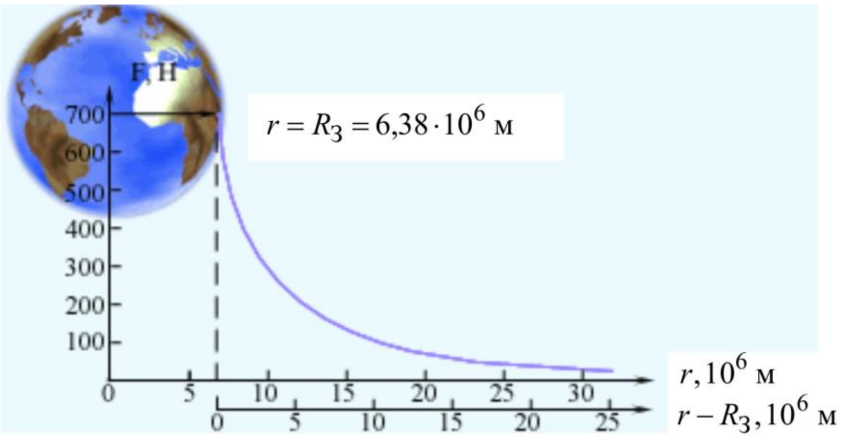


Рис. 1.8.2. Сила притяжения убывает обратно пропорционально квадрату расстояния

Физический смысл гравитационной постоянной в том, что она равна силе в $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н, с которой два тела массой 1 кг каждое, центры которых отдалены на расстояние 1 м, взаимно притягиваются друг к другу.

1.8.2. Поле тяготения. Напряженность поля

Тяготение (*гравитационное взаимодействие*), в отличие от таких механических взаимодействий, как удар, трение и т. д., принадлежит к особой группе взаимодействий. Оно проявляется между телами, удаленными друг от друга. Причем сила тяготения не зависит от того, в какой среде эти тела находятся. Тяготение существует и в вакууме.

*Гравитационное взаимодействие между телами осуществляется с помощью **поля тяготения** (**гравитационного поля**).*

***Поле** – это объективная реальность, посредством которой передается взаимодействие. **Поле**, наряду с **веществом**, является одним из **видов материи**.*

Итак, гравитационное поле порождается телами и, так же как вещество и другие физические поля (например, электромагнитное), является одной из форм материи.

Основное свойство поля тяготения, которое отличает его от других полей, состоит в том, что на любую материальную точку массой m, внесенную в это поле, действует сила притяжения F, пропорциональная m: $\vec{\mathrm{F}} = m\vec{\mathrm{G}}$. Отсюда

$$\vec{\mathrm{G}} = \frac{\vec{\mathrm{F}}}{m}, \tag{1.8.5}$$

где $\vec{\mathrm{G}}$ – вектор, названный ***напряженностью поля тяготения***.

Вектор напряженности $\vec{\mathrm{G}}$ численно равен силе, действующей со стороны поля на материальную точку единичной массы, и совпадает с этой силой по направлению.

Вектор напряженности является силовой характеристикой гравитационного поля и изменяется при переходе от одной точки поля к другой.

Поле тяготения является ***центральным*** и ***сферически симметричным***.

Поле называется ***центральным***, если во всех его точках векторы напряженности направлены вдоль прямых, которые пересекаются в одной и той же точке O, неподвижной относительно какой-либо инерционной системы отсчета. Точка O называется центром сил.

Центральное поле называют ***сферически симметричным***, если численное значение вектора напряженности зависит только от расстояния r до центра сил O:

$$G = G(r).$$

При наложении нескольких полей тяготения напряженность результирующего поля равна векторной сумме напряженностей всех этих полей:

$$\vec{G} = \sum \vec{G}.$$

Этот принцип вытекает из принципа независимости действия сил и называется принципом суперпозиции (наложения полей).

1.8.3. Работа в поле тяготения. Потенциал поля тяготения

Силы тяготения являются консервативными. Это значит, что работа в поле этих сил пропорциональна произведению масс m и M материальных точек и зависит только от начального и конечного положения этих точек. Покажем это на простом примере (рис. 1.8.3).

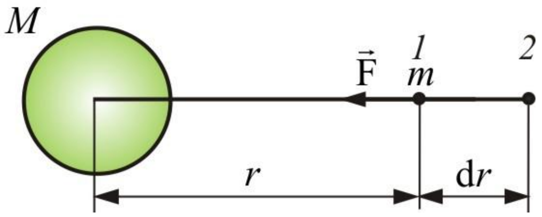


Рис. 1.8.3. К определению работы сил гравитационного поля при перемещении материальной точки массы m из положения 1 в положение 2

Определим работу, совершенную силами поля тяготения при перемещении в нем материальной точки массой m (работу по удалению материальной точки массой m от Земли массой M на расстояние r).

На данную точку в положении *1* действует сила $F = \gamma mM / r^2$.

При перемещении этой точки на расстояние dr совершается работа

$$\mathrm{d}A = -\gamma \frac{mM}{r^2} \mathrm{d}r.$$

Знак минус показывает, что сила и перемещение противоположны. Тогда общая работа

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \mathrm{d}A = -\int_{r_1}^{r_2} \gamma \frac{mM}{r^2} \mathrm{d}r = m\left(\gamma \frac{M}{r_2} - \gamma \frac{M}{r_1}\right). \qquad (1.8.6)$$

Эта формула показывает, что затраченная работа не зависит от траектории, а зависит лишь от координат точки.

Работа консервативных сил при перемещении точки m вдоль произвольного замкнутого контура L тождественно равна нулю:

$$\oint_L \vec{F}, \mathrm{d}\vec{r} \equiv 0 \text{ или } \oint_L \vec{G}, \mathrm{d}\vec{r} \equiv 0. \qquad (1.8.7)$$

Эти интегралы называются *циркуляцией* соответствующих векторов $\vec{F}$ и $\vec{G}$ вдоль замкнутого контура. Равенство нулю этих циркулирующих векторов является *необходимым и достаточным* признаком консервативности силового поля $\vec{F}$.

Из уравнения (1.8.6) следует, что *работа A, совершенная консервативными силами, равна уменьшению потенциальной энергии системы*.

В данном случае работа равна уменьшению потенциальной энергии $E_{п}$ материальной точки, перемещающейся в поле тяготения:

$$A_{12} = -\Delta E_{п} = E_{п1} - E_{п2}, \text{ или } \mathrm{d}A = -\mathrm{d}E_{п}.$$

В случае поля тяготения, создаваемого материальной точкой с массой M,

$$E_{п1} - E_{п2} = -\gamma mM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \qquad (1.8.8)$$

При рассмотрении гравитационного поля Земли формулу (1.8.8) можно переписать в виде:

$$E_{п} - E_{п3} = mgR_{3}^{2}\left(\frac{1}{R_{3}} - \frac{1}{r}\right). \qquad (1.8.9)$$

Принято считать, что потенциальная энергия на поверхности Земли равна нулю. При $r = 0$ в центре Земли

$$E_{п3} = -\frac{1}{2}mgR_{3}.$$

Если условиться, что потенциальная энергия точки m стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки от источника поля точки M, тогда из уравнения (1.8.8) получаем

$$E_{п} = -\gamma\frac{mM}{r}. \qquad (1.8.10)$$

Величина φ, *равная отношению потенциальной энергии материальной точки в поле тяготения к массе* m:

$$\varphi = \frac{E_{п}}{m} = -\sum_{i=1}^{n}\gamma\frac{m_i}{r_i}, \qquad (1.8.11)$$

является энергетической характеристикой самого поля тяготения и называется ***потенциалом поля тяготения***.

По аналогии с потенциалом электростатического поля роль заряда здесь выполняет масса m. Потенциал – величина скалярная.

Потенциал поля тяготения, создаваемый одной материальной точкой с массой *M*, равен

$$\varphi = -\gamma \frac{M}{r}.$$

Потенциал в некоторых точках поля, являющегося результатом наложения полей, равен сумме потенциалов в этой точке, соответствующих каждому из полей в отдельности (принцип суперпозиции):

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i .$$

Между двумя характеристиками поля тяготения – напряженностью и потенциалом – существует взаимосвязь. Найдем ее.

Из выражений (1.8.7) и (1.8.10) следует, что $\vec{F} = m\vec{G}$, а $E_п = m\varphi$.

Так как $\vec{F} = -\nabla E_п$ (1.6.10), то $m\vec{G} = -m\nabla\varphi$, откуда $\vec{G} = -\nabla\varphi$.

Таким образом, вектор напряженности $\vec{G}$ может быть выражен как градиент скалярной функции гравитационного потенциала φ:

$$\vec{G} = -\mathrm{grad}\varphi, \tag{1.8.12}$$

где $\mathrm{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}$.

Здесь вектор, называемый градиентом потенциала со знаком минус, показывает, что в каждой точке поля тяготения вектор напряженности $\vec{G}$ направлен в сторону *наиболее быстрого убывания потенциала*.

Гравитационное поле можно изобразить с помощью *силовых линий* и *эквипотенциальных поверхностей* (рис. 1.8.4).

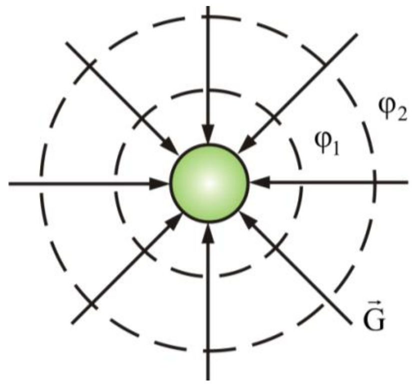


Рис. 1.8.4. Линии напряженности $\vec{G}$ *и эквипотенциальные поверхности* φ_1 *и* φ_2 *гравитационного поля*

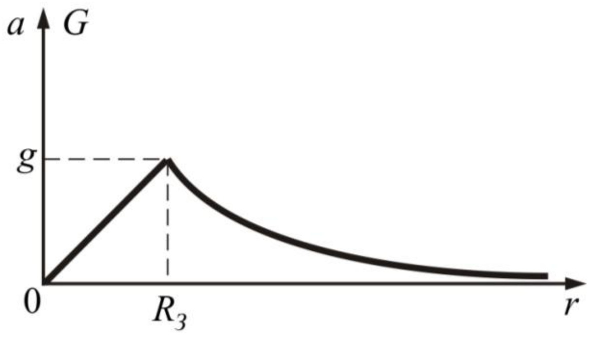


Рис. 1.8.5. Зависимость напряженности $\vec{G}$ *и ускорения* $\vec{a}$ *от расстояния до центра Земли*

Эквипотенциальные поверхности *– геометрическое место точек с одинаковым потенциалом*. ***Линии напряженности*** $\vec{G}$ (*силовые линии поля*) всегда перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям.

Графическая зависимость напряженности гравитационного поля Земли (и ускорения *a*) от расстояния до центра Земли изображена на рис. 1.8.5. Из рисунка видно, что внутри Земли $\vec{G}$ растет пропорционально *r*, а вне Земли убывает $\sim 1/r^2$. Так же и ускорение $a = gr/R_З$ – внутри Земли; $a = gR_З^2/r^2$ – вне Земли.

Закон всемирного тяготения и механика Ньютона явились величайшим достижением естествознания. Они с большой точностью описывают обширный круг явлений, в т. ч. движение в иных системах небесных тел – двойных звезд в звездных скоплениях, галактиках. На основе теории тяготения Ньютона было предсказано существование планеты Нептун, спутников Сириуса и др. В астрономии закон тяготения Ньютона является фундаментом, на основе которого вычисляются движение, строение и эволюция небесных тел. Однако в некоторых случаях поле тяготения и движение физических объектов в полях тяготения не могут быть описаны законами Ньютона. Сильные гравитационные поля и движение в них с большими скоростями $(\upsilon \approx c)$ описываются в общей теории относительности (ОТО), созданной Эйнштейном.

1.8.4. Принцип эквивалентности масс

Понятие «масса» фигурирует в двух разных законах: во втором законе Ньютона и в законе всемирного тяготения.

В первом случае она характеризует инертные свойства тела, во втором – гравитационные свойства, т. е. способность тел притягиваться друг к другу. В связи с этим возникает вопрос: не следует ли различать ***инертную массу*** m_{in} и ***массу гравитационную*** (или тяготеющую) m_g? Ответ на этот вопрос может дать только опыт.

Всякое тело вблизи поверхности Земли испытывает силу притяжения

$$F = \gamma \frac{m_g M}{R_З^2} = m_g g.$$

Под действием этой силы тело приобретает ускорение

$$a = \frac{F}{m_{in}} = \gamma \frac{M}{R_З^2} \frac{m_g}{m_{in}} = g \frac{m_g}{m_{in}}.$$

Опыт показывает, что ускорение *a* для всех тел в гравитационном поле одинаково: $a = g$. Следовательно, $m_g = m_{in}$ при надлежащем выборе единиц измерения. Поэтому говорят просто о массе.

Постоянство отношения m_g/m_{in} для всех тел является характерной особенностью гравитационного поля.

Тождественность ***инерциальной*** и ***гравитационной масс*** Эйнштейн положил в основу общей теории относительности.

Следствием этого является тот факт, что, находясь внутри закрытой кабины, невозможно определить, чем вызвана сила mg: тем, что кабина движется с ускорением $a = g$ или действием притяжения Земли.

1.8.5. Законы Кеплера. Космические скорости

В начале XVI в. польским астрономом Н. Коперником (1473–1543) обоснована *гелиоцентрическая система*, согласно которой движения небесных тел объясняются движением Земли (а также других планет) вокруг Солнца и суточным вращением Земли (рис. 1.8.6).

Иоганн Кеплер, обработав результаты многочисленных наблюдений, получил законы движения планет вокруг Солнца. На основе трех законов Кеплера был открыт закон всемирного тяготения И. Ньютоном.

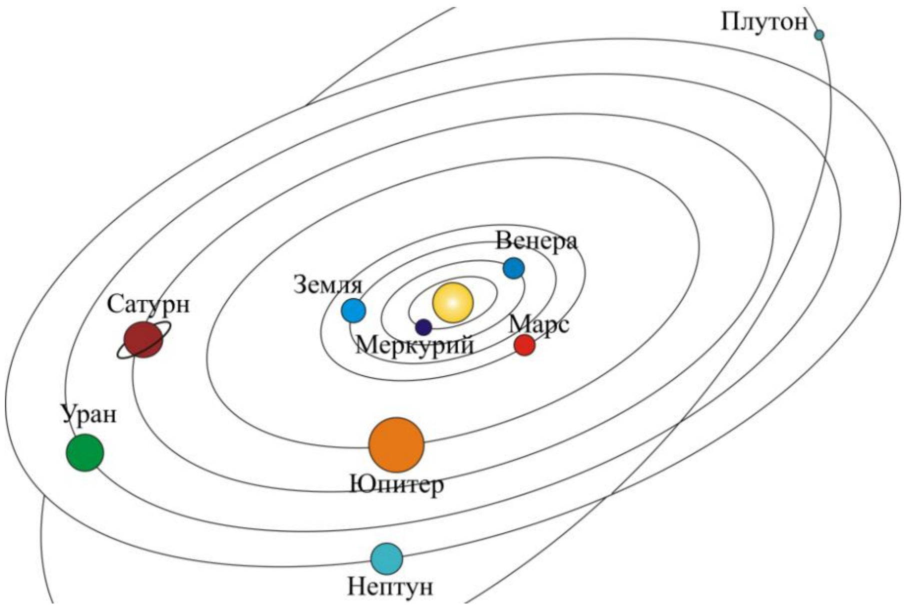


Рис. 1.8.6. Гелиоцентрическая система мира

Первый закон Кеплера. *Все планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которого находится Солнце* (рис. 1.8.7).

Второй закон Кеплера. *Радиус-вектор планеты описывает в равные времена равные площади* (рис. 1.8.8).

Третий закон Кеплера. *Квадраты времен обращения планет относятся как кубы больших полуосей их орбит*:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3. \qquad (1.8.13)$$

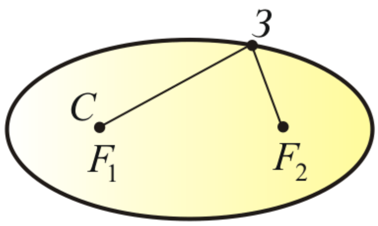


Рис. 1.8.7. Эллиптическое движение Земли вокруг Солнца: F_1 и F_2 – фокусы эллипса

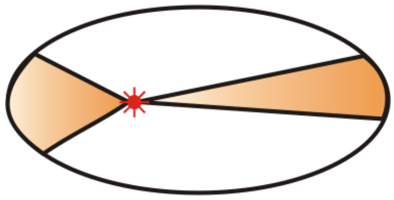


Рис. 1.8.8. Равные площади, описанные радиус-вектором за равные времена

Почти все планеты (кроме Плутона, который по современным представлениям уже не считается планетой) движутся в одной плоскости по орбитам, близким к круговым. Для круговых орбит первый и второй законы Кеплера выполняются автоматически, а третий закон утверждает, что $T^2 \sim R^3$ (T – период обращения; R – радиус орбиты).

Ньютон решил *обратную задачу механики* и из законов движения планет получил выражение для гравитационной силы (1.8.1).

Если тело находится в гравитационном поле на некотором расстоянии r от центра тяготения и имеет некоторую скорость υ, его *полная механическая энергия* равна сумме кинетической и потенциальной энергий и в соответствии с законом сохранения энергии *остается неизменной*:

$$E = E_{\text{к}} + E_{\text{п}} = \frac{m\upsilon^2}{2} - \gamma\frac{Mm}{r} = \text{const}. \tag{1.8.14}$$

Полная энергия может быть положительной и отрицательной, а также равняться нулю. Знак полной энергии определяет характер движения небесного тела.

При $E < 0$ тело не может удалиться от центра притяжения на расстояние $r_0 > r_{\max}$. В этом случае небесное тело движется по *эллиптической орбите* (спутники, планеты Солнечной системы, кометы), рис. 1.8.6.

При $E = 0$ тело движется по *параболической траектории.* Скорость тела на бесконечности равна нулю (рис. 1.8.9).

При $E > 0$ движение происходит по *гиперболической траектории.* Тело удаляется на бесконечность, имея запас кинетической энергии.

Первой космической скоростью *называется скорость движения тела по круговой орбите вблизи поверхности Земли* (рис. 1.8.9). Для этого, как следует из второго закона Ньютона, центробежная сила должна уравновешиваться гравитационной силой:

$$\frac{m\upsilon_1^2}{R_З} = \gamma\frac{Mm}{R_З^2} = gm, \text{ отсюда } \upsilon_1 = \sqrt{gR_З} \approx 7{,}9\cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

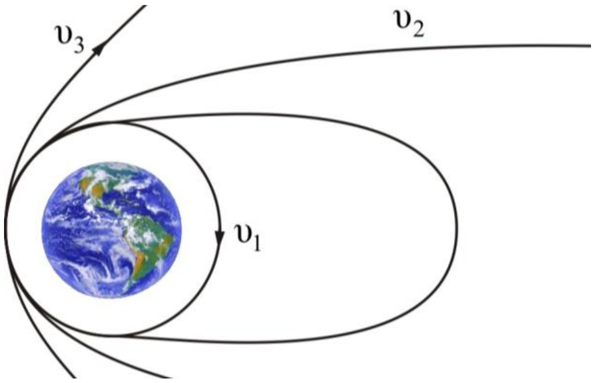


Рис. 1.8.9. Траектории движения тел с различными космическими скоростями

Второй космической скоростью *называется скорость движения тела по параболической траектории. Она равна минимальной скорости, которую нужно сообщить телу на поверхности Земли, чтобы оно, преодолев земное притяжение, стало искусственным спутником Солнца* (*искусственная планета*). Для этого необходимо, чтобы кинетическая энергия тела была не меньше работы по преодолению тяготения Земли:

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2} = \int_R^\infty G\frac{mM}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{GmM}{R},$$

отсюда $\upsilon_2 = \sqrt{2gR_3} = \sqrt{2}\upsilon_1 \approx 11{,}2 \cdot 10^3$ м/с.

Третья космическая скорость *– скорость движения, при которой тело может навсегда покинуть пределы Солнечной системы, преодолев притяжение Солнца.*

Чтобы преодолеть силу притяжения Солнца, телу, находящемуся на Земле, надо придать скорость υ_3. Эта скорость определяется аналогично υ_2, т. е. из равенства кинетической энергии тела и его потенциальной энергии в поле Солнца при его удалении в бесконечность:

$$\frac{m\upsilon_3^2}{2} = \gamma\frac{mM_С}{R_{\hat{\imath}}}, \tag{1.8.15}$$

отсюда $\upsilon_3 = \sqrt{\dfrac{2\gamma M_С}{R_о}} = 42{,}1 \cdot 10^3$ м/с,

где $R_о$ – радиус земной орбиты; $M_С$ – масса Солнца.

С учетом того, что Земля вращается вокруг своей оси со скоростью 30 км/с, значения третьей космической скорости зависят от направления запуска ракет и изменяются в пределах от 16,6 до 73 км/с. ***При оптимальном запуске*** $\upsilon_3 = 16{,}7 \cdot 10^3$ м/с.

Контрольные вопросы. Упражнения

1. Сформулируйте закон всемирного тяготения Ньютона.
2. Каков физический смысл, значение и размерность гравитационной постоянной?
3. Что такое напряженность поля тяготения?
4. Какие поля называются однородным, центральным, сферически симметричными?
5. Какие величины вводятся для характеристики поля тяготения и какова связь между ними?
6. Покажите, что силы тяготения консервативны.
7. Чему равно максимальное значение потенциальной энергии системы из двух тел, находящихся в поле тяготения?
8. Как вычисляется работа в поле сил тяготения?
9. Изобразите силовые линии и эквипотенциальные поверхности.
10. Приведите графическую зависимость напряженности гравитационного поля от расстояния до центра земли.
11. Сформулируйте и поясните принцип эквивалентности Эйнштейна.
12. Сформулируйте законы Кеплера.
13. Какие траектории движения имеют спутники, получившие первую и вторую космические скорости?
14. Как вычисляются первая и вторая и третья космические скорости?
15. Масса самолета в 100 раз больше масс автомобиля, а скорость автомобиля в 20 раз меньше скорости самолета. Кинетическая энергия самолета или автомобиля?
16. Что можно сказать о тормозном пути двух одинаковых грузовиков, движущихся с одинаковой скоростью на одном и том же участке дороги, если один грузовик пустой, а другой полностью загружен? Поясните ответ.
17. Как изменяется сила притяжения в зависимости от расстояния до центра Земли? В каких точках Земли сила тяготения равна силе тяжести?
18. В каких точках Земли наблюдается наибольшая разность между силой тяготения и силой тяжести?
19. К каким последствиям привело бы внезапное исчезновение силы тяготения?
20. Самолет движется по дуге радиусом R с постоянной скоростью 500 км/ч. При каком радиусе R пассажиры испытывают состояние невесомости?

1.9. ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗОВ

В механике с большой точностью жидкости и газы рассматриваются как сплошные среды, непрерывно распределенные в занятой ими части пространства. В данной главе рассматриваются поверхностное натяжение жидкости, капиллярные явления, уравнение неразрывности, уравнение Бернулли, трение и вязкость жидкости.

1.9.1. Поверхностное натяжение жидкости

Согласно молекулярно-кинетической теории каждая молекула жидкости испытывает притяжение со стороны других молекул. При удалении молекул друг от друга силы притяжения быстро уменьшаются. На расстоянии порядка ~ 10^{-9} м, называемом *радиусом молекулярного действия* r, силами молекулярного притяжения можно пренебречь ввиду их малости.

Рассмотри отдельную молекулу A (рис. 1.9.1), находящуюся внутри жидкости. Если провести вокруг этой молекулы сферу радиусом r, то силы притяжения со стороны молекул, заключенных в данной сфере, будут направлены в разные стороны и их равнодействующая будет равна нулю.

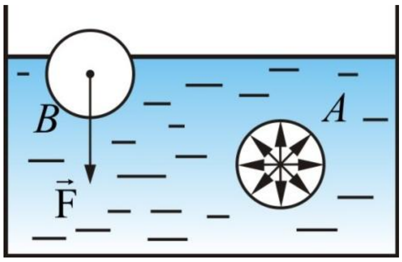


Рис. 1.9.1. Действие сил на отдельную молекулу, находящуюся: А – внутри жидкости, В – на поверхности

Выделим молекулу B, находящуюся на расстоянии меньше r от поверхности жидкости. Снова проведем сферу радиусом r вокруг молекулы. Как видно из рисунка, часть этой сферы выйдет за пределы жидкости.

В связи с тем что концентрация молекул газа над жидкостью мала, равнодействующая сил молекулярного притяжения $\vec{F}$, действующих на молекулу B, не будет равна нулю. Эта равнодействующая направлена внутрь жидкости. Таким образом, молекулы поверхностного слоя жидкости оказывают на жидкость давление, которое называют молекулярным давлением. Жидкость оказывается сжатой. Поэтому жидкости малосжимаемы при внешнем воздействии.

Молекулы жидкости в поверхностном слое за счет сил межмолекулярного взаимодействия обладают большей потенциальной энергией по сравнению с другими молекулами. Чтобы молекулы из глубины жидкости переместились к её поверхности, необходимо совершить работу против сил, действующих в поверхностном слое. Эта работа совершается за счет уменьшения кинетической энергии теплового движения молекулы и расходуется на увеличение её потенциальной энергии. Итак, в поверхностном слое жидкости обладают дополнительной поверхностной энергией ΔE. Величина энергии ΔE тем больше, чем больше поверхность жидкости.

Для увеличения поверхности жидкости необходимо совершить работу ΔA против сил поверхностного натяжения:

$$\Delta A = \sigma \Delta S,$$

где ΔS – приращение площади приповерхностного слоя жидкости. Тогда

$$\sigma = \frac{\Delta A}{\Delta S}.$$

Здесь *поверхностное натяжение* σ равно отношению работы, которую необходимо совершить, чтобы увеличить поверхность жидкости площадью ΔS, к площади этой поверхности.

Если поверхность жидкости ограничена каким-либо замкнутым контуром, то на неё будут действовать силы, стремящиеся сократить эту поверхность. Эти силы *называют силами поверхностного натяжения*.

Поверхностным натяжением σ называется физическая величина, равная отношению силы F, действующей на участок контура поверхности, к длине l этого участка,

$$\sigma = F/l. \tag{1.9.1}$$

Поверхностное натяжение измеряется в джоулях на квадратный метр (Дж/м^2) или в ньютонах на метр (Н/м).

1.9.2. Смачивание. Капиллярные явления

Можно наблюдать, как легко капля воды растекается по поверхности стола, прилипая к нему, а капля ртути свободно перекатывается с одного места на другое, образуя шарик. При этом молекулы ртути преодолевают не только силу тяжести, но и силу притяжения к молекулам стола. Следовательно, сила притяжения молекул ртути друг к другу сильнее, чем к молекулам стола.

В первом случае жидкость *смачивает* поверхность твердого тела, а во втором – *не смачивает*. Без каких-либо внешних воздействий капелька ртути принимает сферическую форму. Стремление поверхности жидкости к сокращению приводит к тому, что давление под выпуклой поверхностью больше, а под вогнутой меньше, чем под плоской. Силы поверхностного натяжения создают *добавочное давление* P (в случае выпуклой поверхности – положительное, а при вогнутой – отрицательное). Вычислим давление P для сферической поверхности.

Пусть радиус сферы r увеличивается на малую величину Δr. При этом поверхность сферы увеличивается на величину $\Delta S = 8\pi r\Delta r$, а объем на величину $\Delta V = 4\pi r^2\Delta r$. Найдем работу ΔA по увеличению объема:

$$\Delta A = P\Delta V = 4\pi r^2 p\Delta r.$$

Для образования новой поверхности, требуется совершить работу:

$$\Delta A_1 = \Delta S\cdot\sigma = 8\pi r\sigma\Delta r.$$

Приравнивая ΔA и ΔA_1, найдем величину добавочного давления:

$$P = 2\sigma/r. \qquad (1.9.2)$$

Для поверхности любой формы добавочное давление можно рассчитать по формуле П. Лапласа:

$$P = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \qquad (1.9.3)$$

где R_1 и R_2 – радиусы кривизны поверхности.

Жидкость может смачивать поверхность одного тела и не смачивать поверхность другого. Например, вода смачивает дерево, стекло, но не смачивает парафин. Ртуть смачивает поверхности металлов, но не смачивает поверхности дерева и стекла.

Если опустить в воду тонкие стеклянные трубки разного диаметра (капилляры), то жидкость в них поднимется на разную высоту. Чем тоньше капилляр, тем на большую высоту поднимется жидкость. Если взять жидкость, не смачивающую жидкость, например ртуть, то уровень жидкости в капилляре будет ниже уровня жидкости в сосуде (рис. 1.9.2). Наблюдаемые явления изменения высоты уровней жидкости в капиллярах получили названия *капиллярных явлений*.

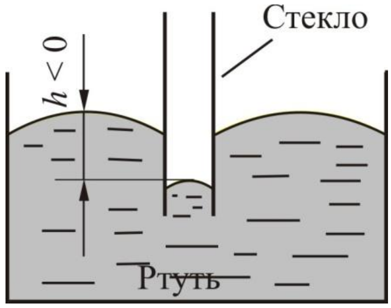


Рис. 1.9.2. Не смачивающая жидкость

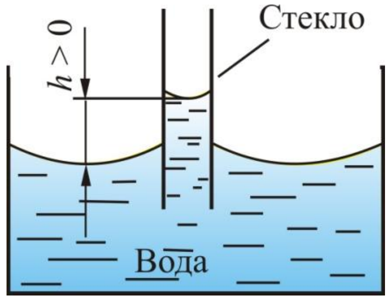


Рис. 1.9.3. Жидкость, смачивающая трубку

Если жидкость смачивает трубку (рис. 1.9.3), то поверхность жидкости в трубке (мениск) имеет вогнутую форму, если не смачивает – выпуклую. Под вогнутой поверхностью образуется отрицательное добавочное давление, и жидкость поднимается вверх по капилляру до тех пор, пока это давление не уравновесится высотой столба жидкости в капилляре (гидростатическим давлением).

Найдем высоту подъема жидкости h в капилляре. Пусть жидкость смачивает капилляр радиусом r (рис. 1.9.3), образуя вверху вогнутый мениск. Наименьший радиус кривизны мениска $\approx r$. Как следует из уравнения (1.9.2), добавочное давление $P \approx 2\sigma/r$. Тогда величина направленной вверх силы:

$$F = \frac{2\sigma S}{r},$$

где S – площадь поперечного сечения трубки.

Эта сила уравнивается силой тяжести столбика жидкости $mg = h\rho gS$, т. е. $F = mg$ или

$$\frac{2\sigma S}{r} = h\rho gS,$$ где ρ – плотность жидкости.

Из этого уравнения находим:

$$h = \frac{2\sigma}{\rho rg}.$$

Для несмачивающей жидкости мениск выпуклый и добавочное давление дает силу, направленную вниз. Уровень жидкости в капиллярной трубке при этом будет ниже уровня жидкости в сосуде на величину h, определяемую по формуле $h = \dfrac{2\sigma}{\rho rg}$.

1.9.3. Давление в неподвижных жидкостях и газах

Гидроаэромеханика *– раздел механики, изучающий равновесие и движение жидкостей и газов, их взаимодействие между собой и обтекаемыми ими твердыми телами*.

В этом разделе механики используется единый подход к изучению жидкостей и газов, так как во многих механических явлениях их поведение можно описать одинаковыми параметрами и единичными уравнениями.

Жидкость, как и газ, принимает форму сосуда, в котором она находится. При этом жидкости и газы рассматриваются как сплошные, непрерывно распределенные в той области пространства, которую они занимают. Газ заполняет весь предоставленный ему объем, т. е. объем газа определяется объемом сосуда, в котором он находится. Объем жидкости не зависит от объема сосуда и остается практически постоянным. Эти и другие отличия жидкостей и газов объясняются характером движения и силами взаимодействия их молекул.

Плотность жидкости мало зависит от давления, плотность газов от давления зависит существенно. Из опыта известно, что в ряде задач сжимаемостью жидкости можно пренебречь без ущерба для точности решения. В этом случае пользуются понятием *несжимаемая жидкость*. Считают, что плотность её везде одинакова и не зависит от времени.

***Давление** – физическая величина, равная отношению силы* ΔF, *действующей на элемент поверхности* ΔS *нормально к ней, к площади этого элемента*:

$$P = \frac{\Delta F}{\Delta S}. \tag{1.9.4}$$

Единица измерения давления – паскаль (Па).

Давление внутри жидкости

Определим давление внутри весомой жидкости, считая её несжимаемой, т. е. считая её плотность неизменной с глубиной.

Пусть на жидкость в сосуде действует внешнее давление P_0. Выделим мысленно в жидкости вертикальный цилиндр с поперечным сечением S и высотой h.

На верхний слой жидкости действует внешнее давление P_0, которое также передается и другим слоям жидкости.

Однако к этому давлению в нижележащих слоях добавляется давление, создаваемое весом слоев жидкости, расположенных выше.

На верхнее основание цилиндра действует сила

$$F_0 = P_0 S;$$

на нижнее основание –

$$F = PS,$$

где P – давление на глубине h.

Кроме того, вертикально вниз действует вес столба жидкости, находящейся в объеме цилиндра, равный:

$$F_m = mg = \rho hSg,$$

где ρ – плотность жидкости; hS – её объем в цилиндре. Боковые силы не учитываются, так как они взаимно уравновешены.

Запишем условие равновесия выделенного столба жидкости:

$$F_0 + F_m = F \text{ или } P_0 S + \rho ghS = PS.$$

Из этого равенства следует, что искомое давление P на глубине h равно:

$$P = P_0 + \rho gh.$$

Гидростатическое давление:

$$P_r = \rho g h. \qquad (1.9.5)$$

Допустим, что внешнее давление $P_0 = 0$. Тогда давление на глубине h равно гидростатическому:

$$P = P_r.$$

Следовательно, гидростатическое давление обусловлено весом слоев жидкости, лежащих над данным слоем.

Если выделить любой горизонтальный тонкий слой жидкости, то он оказывает одинаковое давление, так как для такого слоя можно считать $h = \mathrm{const}$ и остальные величины в формуле тоже постоянны.

Давление при равновесии жидкостей и газов подчиняется ***закону Паскаля***: *давление в любом месте покоящейся жидкости одинаково по всем направлениям и давление одинаково передается по всему объему, занятому покоящейся жидкостью*.

При переходе к более глубоким слоям жидкости давление возрастает, т. е. сила давления на нижние слои жидкости больше, чем на верхние, поэтому на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила – *сила Архимеда*. Эта сила определяется по ***закону Архимеда***: *на тело, погруженное в жидкость или газ, действует выталкивающая сила, направленная вертикально вверх и равная весу вытесненной телом жидкости или газа*:

$$F_A = \rho g V, \qquad (1.9.6)$$

где ρ – плотность жидкости или газа; V – объем тела.

1.9.4. Уравнение неразрывности

Жидкости и газы являются текучими средами: если на частицы жидкости или газа действуют сдвигающие внешние силы, то частицы будут перемещаться до тех пор, пока не исчезнут или не уравновесятся эти силы. Внутренние силы не могут остановить это движение, но могут его замедлять. Тормозящие силы, возникающие между слоями двигающейся жидкости или газа, называются *силами вязкого трения*.

Жидкость, в отличии от газа, считается средой несжимаемой, иногда газ до определенных границ можно рассматривать как несжимаемый.

Рассмотрим течение жидкости по трубе с переменным сечением. Уравнение неразрывности выводится на основании закона сохранения массы и невозможности разрыва жидкости и образования в ней пустот (отсюда происходит название закона).

Рассмотрим жидкость в объеме V между сечениями S_1 и S_2 (рис. 1.9.4).

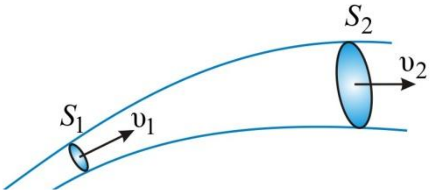


Рис. 1.9.4. Течение жидкости по трубе. Сечения трубы S_1 и S_2 различны, поэтому и скорость υ_1 и υ_2 в этих сечениях неодинакова

Так как жидкость несжимаемая и в ней не могут образовываться пустоты, то масса жидкости между сечениями S_1 и S_2 не может измениться. За время Δt жидкость пройдет через сечение S_1 и переместится на расстояние

$$l_1 = \upsilon_1 \Delta t.$$

В объем V втечет жидкость, имеющая объем:

$$V_1 = l_1 S_1 = S_1 \upsilon_1 \Delta t,$$

масса которой

$$m_1 = \rho V_1 = \rho S_1 \upsilon_1 \Delta t,$$

где ρ – плотность жидкости; υ_1 – её скорость в сечении S_1.

Аналогично для сечения S_2 получим:

$$V_2 = l_2 S_2 = S_2 \upsilon_2 \Delta t,$$

$$m_2 = \rho V_2 = \rho S_2 \upsilon_2 \Delta t.$$

Так как масса жидкости в объеме V не может измениться, то

$$m_1 = m_2.$$

Исходя из этого получим:

$$l_1 S_1 = l_2 S_2,$$

т. е.

$$V_1 = V_2,$$

$$S_1 \upsilon_1 = S_2 \upsilon_2 = \text{const}. \tag{1.9.7}$$

Это уравнение называется *уравнением неразрывности для несжимаемой жидкости: произведение скорости течения несжимаемой жидкости на её поперечное сечение есть величина постоянная*.

1.9.5. Уравнение Бернулли и его применение*

Уравнение Д. Бернулли выводится из закона сохранения энергии для *идеальной* (без вязкости) жидкости для стационарных течений. *Стационарным* считается течение, при котором скорость жидкости в каждой точке течения не меняется со временем. Для реальных жидкостей уравнением Бернулли можно пользоваться, если у них низкая вязкость.

Рассмотрим жидкость, движущуюся по трубе между сечениями S_1 и S_2 (рис. 1.9.4). Так как течение стационарное, то кинетическая энергия жидкости в объеме V между сечениями S_1 и S_2 не изменится. А так как труба неподвижная, то не изменится и потенциальная энергия жидкости в этом объеме. Таким образом, полная механическая энергия рассматриваемого объема жидкости в момент времени t будет равна:

$$E_1 = E_V + m_1gh_1 + m_1\upsilon_1^2/2,$$

в конце промежутка времени Δt:

$$E_2 = E_V + m_2gh_2 + m_2\upsilon_2^2/2,$$

где E_V – энергия жидкости в объеме V. В сечении S_1 жидкость, которая находится слева от этого сечения, совершит работу

$$A_1 = P_1S_1l_1 = P_1V_1,$$

которая пойдет на увеличение энергии жидкости между сечениями S_1 и S_2. В свою очередь, эта жидкость совершит работу в сечении S_2:

$$A_2 = P_2S_2l_2 = P_2V_2,$$

что уменьшит её энергию на эту величину. Здесь P_1 и P_2 – давления жидкости в объемах V_1 и V_2 соответственно. В результате получим:

$$E_2 - E_1 = A_2 - A_1 \text{ или } E_2 + A_2 = E_1 + A_1.$$

Исходя из этого получим:

$$E_V + m_2gh_2 + m_2\upsilon_2^2/2 + P_2V_2 = E_V + m_2gh_1 + m_1\upsilon_1^2/2 + P_1V_1.$$

Учитывая, что $m_1 = m_2$, и поделив это уравнение на $V_1 = V_2$, получим ***уравнение Бернулли***:

$$\rho\upsilon_2^2/2 + \rho gh_2 + P_2 = \rho\upsilon_1^2/2 + \rho gh_1 + P_1. \quad (1.9.8)$$

Оно выполняется для любых точек стационарного течения идеальной жидкости. Т. к. сечения выбирались произвольно, то можно записать:

$$\rho\upsilon^2/2 + \rho gh + P = \text{const}. \quad (1.9.9)$$

В технике величина ρgh называется *гидростатическим напором* (давлением); $\rho\upsilon^2/2$ – *гидродинамическим* (скоростным) напором; P – *статическим давлением*, а их сумма $\rho\upsilon^2/2 + \rho gh + P$ – *полным давлением*.

Частные случаи.

Пусть жидкость покоится, т. е. $\upsilon_1 = \upsilon_2 = 0$. Исходя из этого получим:

$$P_2 = P_1 + \rho g(h_1 - h_2),$$
$$P_2 - P_1 = \Delta P,$$

отсюда

$$\Delta P = \rho g(h_1 - h_2) = \rho gh.$$

В покоящейся жидкости изменение статического давления равно гидростатическому напору. Так как в неподвижной жидкости силы вязкости отсутствуют, то это уравнение верно и для реальных жидкостей.

Пусть труба, по которой течет жидкость, горизонтальная, т. е. $h_1 = h_2$. Исходя из этого получим:

$$\rho \upsilon_2^2/2 + P_2 = \rho \upsilon_1^2/2 + P_1.$$

Пусть $\upsilon_2 > \upsilon_1$, тогда $P_2 < P_1$. В горизонтальной трубе давление меньше там, где скорость потока больше (сужение трубы).

Уравнение Бернулли используется для объяснения явлений в различных технических условиях.

Применение уравнения Бернулли

Подъемная сила крыла самолета

Происхождение подъемной силы крыла самолета было объяснено выдающимся русским ученым Н.Е. Жуковским. В деталях теория довольна сложна. Рассмотрим её в упрощенном виде.

Профиль крыла самолета (рис. 1.9.5) имеет такую форму, что скорость обтекающего потока воздуха относительно крыла внизу меньше, а вверху больше: $\upsilon_2 > \upsilon_1$. Поэтому давление над крылом меньше, чем под крылом: $P_1 > P_2$. Это приводит к избыточной силе $\vec{F}$, которую можно разложить на две составляющие: подъемную силу $\vec{F}_п$ и силу сопротивления $\vec{R}$.

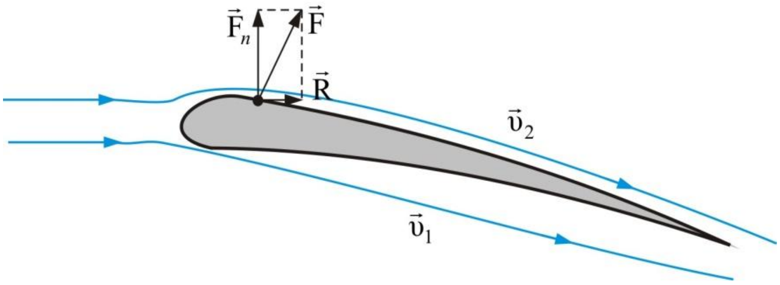


Рис. 1.9.5. Профиль крыла самолета

Таким же образом объясняется происхождение подъемной силы у кораблей на подводных крыльях.

Измерение скорости течения жидкости и газа

Рассмотрим схему, изображенную на рис. 1.9.6. Применив уравнение Бернулли для впаянных в трубу (*1*) тонких вертикальных трубок (*2* и *3*), получим для каждой из них:

$$P_1 = \rho g h_1 \text{ и } P_2 = \rho g h_2.$$

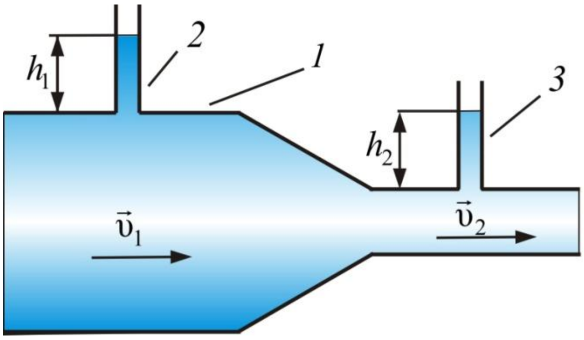


Рис. 1.9.6. Установка для измерения скорости течения жидкости

В широкой части давление больше, поэтому и высота поднятия жидкости больше.

Используя уравнение Бернулли и эти данные, получим

$$\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2 = \frac{2(P_1 - P_2)}{\rho} = 2g(h_1 - h_2).$$

Таким образом, если известна скорость течения в одной точке (допустим υ_1), то, измерив манометром разность давлений или разность высот жидкости в трубах, которые и являются в этом случае манометрами, по этой формуле можно определить скорость течения υ_2.

Подобным образом можно измерять скорость самолета относительно воздуха (рис. 1.9.7).

За борт самолета выводится тонкая трубка, называемая трубкой Пито[37]. Трубка Пито присоединяется к дифференциальному манометру, измеряющему разность давлений: полного – с помощью внутреннего канала (*1*) и статического – с помощью канала (*2*). Разность этих давлений есть динамический напор $\rho\upsilon^2/2$.

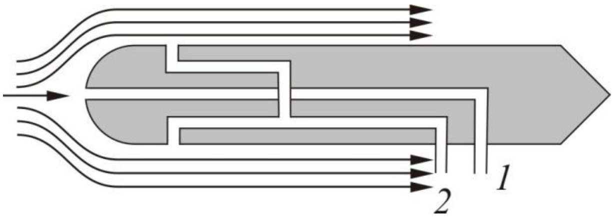


Рис. 1.9.7. Трубка Пито

Если манометр проградуировать в величинах скорости, учитывая изменение плотности воздуха, то получим прибор для измерения скорости самолета.

1.9.6. Течение жидкости. Вязкость

Течение реальной жидкости по трубе постоянного сечения сопровождается падением статистического давления. Это явление объясняется наличием у жидкости внутреннего трения (вязкости) и сопровождается переходом части её механической энергии во внутреннюю.

Ламинарное течение – течение жидкости, при котором слои скользят друг относительно друга, не перемешиваясь.

Турбулентное течение – течение, сопровождающееся образованием вихрей и перемешиванием слоев.

Установившееся течение может быть только ламинарным. При ламинарном течении жидкости по трубе скорость слоев непрерывно изменяется от максимальной (по оси трубы) до нуля (у стенок).

Любой слой тормозит движение соседнего слоя, расположенного ближе к оси трубы, и оказывает ускоряющее действие на слой, расположенный дальше от оси. Между соприкасающимися слоями жидкости действуют тангенциальные *силы внутреннего трения*. Модуль этих сил зависит от площади S слоев и градиента скорости $\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}x}$ (изменение скорости на единицу длины в направлении, перпендикулярном скорости) и определяется ***формулой Ньютона***:

$$F = \eta \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}x} S,$$

где η – динамическая вязкость, численно равная силе трения, возникающей между параллельно движущимися слоями жидкости единичной площади при единичном градиенте скорости.

Единицы измерения вязкости – паскаль-секунда (1 Па · с = 1 кг/(с · м)).

Коэффициент вязкости различен для разных сред и зависит от температуры. С ростом температуры вязкость жидкости уменьшается, а вязкость газов увеличивается.

Вязкость некоторых жидкостей (эмульсии, суспензии, растворы полимеров) зависит от давления, градиента скорости. Это объясняется тем, что структурные элементы жидкости (белковые молекулы, дисперсные частицы) располагаются в потоке по-разному при разной скорости. Такую жидкость называют неньютоновской. Кровь (суспензия клеток крови в белковом растворе – плазма) также относится к неньютоновским жидкостям.

Число Рейнольдса

С увеличением скорости потока ламинарное течение может перейти в турбулентное, а скорость, при которой происходит этот переход, называется ***критической***.

Экспериментально английским ученым О. Рейнольдсом[38] в 1883 г. установлено, что важнейшей характеристикой течения является безразмерная величина, названная ***числом Рейнольдса*** (Re):

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho < \upsilon > l}{\eta},$$

где ρ – плотность жидкости (газа); $<\upsilon>$ – средняя (по сечению трубы) скорость потока; l – линейный размер, характерный для поперечного сечения трубы; η – динамическая вязкость.

При малых значениях числа Рейнольдса наблюдается ламинарное течение; при $Re > Re_{кр}$ (критическое значение) ламинарное течение переходит в турбулентное. Для гладких круглых труб $Re_{кр} \approx 2300$.

Контрольные вопросы. Упражнения

1. Назовите примеры повседневных проявлений закона Паскаля.
2. Гидравлический пресс дает выигрыш в силе. Дает ли он выигрыш в работе? Почему?
3. Как устанавливается свободная поверхность однородной по плотности жидкости во всех сообщающихся сосудах? Почему? На основании какого закона?
4. Что можно сказать о давлении в сосудах на какой-то определенной высоте, например h_1? Сравните давления в сосудах на уровнях h_1 и h_2, если $h_2 = 2h_1$.
5. Три сосуда разной формы (площадь дна у сосудов одинакова) заполнены водой до одного и того же уровня. Как объяснить «гидростатический парадокс» (сила «весового» давления на дно не совпадает с весом налитой жидкости)?
6. В каком случае тело тонет? плавает?
7. Ученик Галилея – Эванджелиста Торричелли взял закрытую с одного конца длинную стеклянную трубку (l = 1 м), наполнил ртутью и, закрыв отверстие трубки пальцем, перевернул её и погрузил в сосуд с ртутью, после чего убрал палец. Почему ртуть не вытекла полностью?
8. Что такое установившееся (стационарное) течение?
9. Зависит ли скорость в стационарном потоке от площади поперечного сечения?
10. Жидкость течет по горизонтальной трубе. Будет ли гидростатическое давление в первой и третьей четвертях трубы разным?

1.10. Специальная теория относительности

В механике с большой точностью жидкости и газы рассматриваются как сплошные среды, непрерывно распределенные в занятой ими части пространства. В данной главе рассматриваются поверхностное натяжение жидкости, капиллярные явления, уравнение неразрывности, уравнение Бернулли, трение и вязкость жидкости.

1.10.1. Принцип относительности Галилея

При изложении механики предполагалось, что все скорости движения тел значительно меньше скорости света. Причина этого в том, что механика Ньютона (называемая также классической) неверна при скоростях движения тел, близких к скорости света ($\upsilon \to c$). Правильная теория для этого случая называется релятивистской механикой (от англ. *relativity* – относительность) или *специальной теорией относительности* (СТО). Механика Ньютона оказалась замечательным приближением к релятивистской механике, справедливым в области $\upsilon << c$.

Большинство встречающихся в повседневной жизни скоростей значительно меньше скорости света. Но существуют явления, где это не так (ядерная физика, электромагнетизм, фотоэффект, астрономия и т. д.).

Согласно представлениям классической механики механические явления происходят одинаково в двух системах отсчета, движущихся равномерно и прямолинейно относительно друг друга.

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета: k и k'. Система k' движется относительно k со скоростью $\upsilon = \text{const}$ вдоль оси x. Точка M движется в двух системах отсчета (рис. 1.10.1).

Найдем связь между координатами точки M в обеих системах отсчета. Отсчет начнем, когда начала координат систем совпадают, т. е. $t = t'$. Тогда

$$x = x' + \upsilon t;\ y = y';\ z = z';\ t = t'. \qquad (1.10.1)$$

Совокупность уравнений (1.10.1) называется ***преобразованиями Галилея***.

В этих уравнениях время $t = t'$, т. е. в классической механике предполагалось, что время течет одинаково в обеих системах отсчета, независимо от скорости («*Существует абсолютное время, которое течет всегда одинаково и равномерно*», – говорил Ньютон).

В векторной форме преобразования Галилея можно записать так:

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{\upsilon} t. \qquad (1.10.2)$$

Продифференцируем это выражение по времени и получим ***закон сложения скоростей*** в классической механике (рис. 1.10.2):

$$\vec{u} = \vec{\upsilon}\,' + \vec{\upsilon}. \qquad (1.10.3)$$

Из (1.10.3) следует, что скорость движения $\vec{\upsilon}'$ точки M (сигнала) в системе k' и $\vec{u}$ в системе k различна.

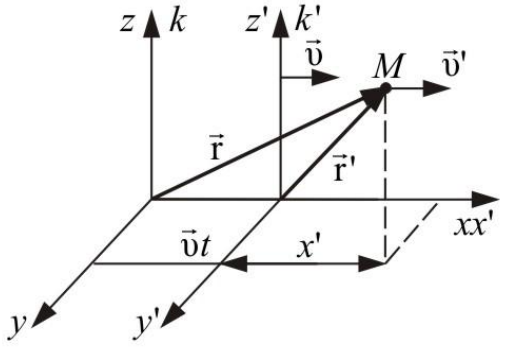


Рис. 1.10.1. Система отсчета k' движется относительно k со скоростью υ

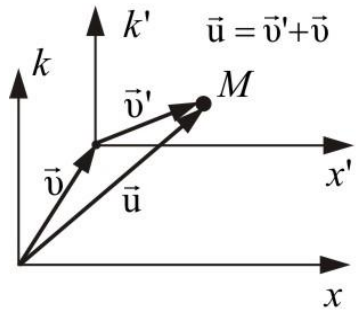


Рис. 1.10.2. К закону сложения скоростей в классической механике

Законы природы, определяющие изменение состояния движения механических систем, не зависят от того, к какой из двух инерциальных систем отсчета они относятся. Это и есть ***принцип относительности Галилея***.

Из преобразований Галилея и принципа относительности следует, что взаимодействия в классической физике должны передаваться с бесконечно большой скоростью $c \to \infty$ (*теория дальнодействия*).

Принцип относительности Галилея и законы Ньютона подтверждались ежечасно, при рассмотрении любого движения, и господствовали в физике более 200 лет.

1.10.2. Принцип относительности Эйнштейна

В 1905 г. в журнале «Анналы физики» вышла знаменитая статья А. Эйнштейна «К электродинамике движущихся тел», в которой была изложена специальная теория относительности (СТО).

Принцип относительности Эйнштейна представляет собой фундаментальный физический закон, согласно которому любой процесс протекает одинаково в изолированной материальной системе, находящейся в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения. Иначе говоря, законы физики имеют одинаковую форму во всех инерциальных системах отсчета.

В основе СТО лежат ***два постулата***, выдвинутых Эйнштейном:

1. ***Уравнения, выражающие законы природы, инвариантны по отношению к любым инерциальным системам отсчета.***

Инвариантность – *неизменность вида уравнения при переходе из одной системы отсчета в другую* (*при замене координат и времени одной системы – другими*).

2. ***Скорость света в пустоте одинакова во всех инерциальных системах отсчета и не зависит от скорости источника и приемника света.***

Специальная теория относительности представляет физическую теорию, изучающую пространственно-временные закономерности, справедливые для любых физических процессов, когда можно пренебречь действием тяготения. СТО, опираясь на более совершенные данные, раскрывает новый взгляд на свойства пространства и времени. Эти свойства необходимо учитывать при скоростях движения, близких к скорости света.

1.10.3. Преобразования Лоренца

Формулы преобразования при переходе из одной инерциальной системы в другую, с учетом постулатов Эйнштейна, предложил нидерландский физик-теоретик Х.А. Лоренц в 1904 г.

Так же как и в п. 1.10.1, рассмотрим две инерциальные системы отсчета (неподвижную и подвижную) k и k' (рис. 1.10.1). Пусть x, y, z, t – координаты и время некоторого события в системе k, а x', y', z', t' – координаты и время того же события в k'. Как связаны между собой эти координаты и время?

В рамках классической теории, при $\upsilon << c$, эта связь устанавливается преобразованиями Галилея (1.10.1), в основе которых лежат представления об абсолютном пространстве и независимом времени.

Из этих преобразований следует, что взаимодействия, в т. ч. и электромагнитные, должны передаваться с бесконечно большой скоростью: $c \to \infty$, и скорость движения сигнала в системе k отличается от скорости в системе k': $\vec{u} = \vec{\upsilon}' + \vec{\upsilon}$ (рис. 1.10.2).

Лоренц установил связь между координатами и временем события в системах отсчета k и k', основываясь на тех экспериментальных фактах, что:

- все инерциальные системы отсчета физически эквивалентны;
- скорость света в вакууме постоянна и конечна во всех инерциальных системах отсчета и не зависит от скорости движения источника и наблюдателя.

Таким образом, при больших скоростях движения, сравнимых со скоростью света, Лоренц получил ($\beta = \upsilon/c$):

$$x = \frac{x' + \upsilon t'}{\sqrt{1-\beta^2}}; \; y = y'; \; z = z'; \; t = \frac{t' + \frac{\upsilon x'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (1.10.4)$$

Это и есть знаменитые ***преобразования Лоренца***.

В теории относительности время иногда называют четвертым измерением. Точнее говоря, величина ct, имеющая ту же размерность, что и x, y, z, ведет себя как четвертая пространственная координата. Таким образом, ct и x проявляют себя с математической точки зрения сходным образом.

Как видно из преобразований Лоренца, скорость υ относительного движения систем отсчета может быть только меньше скорости света c, т. к. в противном случае коэффициент $1/\sqrt{1-\beta^2}$ становится мнимым (если $\upsilon > c$) или обращается в бесконечность (если $\upsilon = c$) и преобразования Лоренца теряют смысл. В случае, когда $\upsilon \ll c$, преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея (***принцип соответствия***). Чтобы в этом убедиться, достаточно в формулах преобразований совершить предельный переход при $c \to \infty$.

Зная формулу преобразования координат и времени произвольного события при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, можно более строго сформулировать ***обобщенный принцип относительности***: *уравнения, выражающие законы природы, должны быть инвариантны относительно преобразования Лоренца, т. е. их вид не должен измениться при этих преобразованиях.*

1.10.4. Следствия из преобразований Лоренца

Непосредственное *следствие преобразований Лоренца*: *не может быть объектов, движущихся быстрее света.* ***Скорость света играет роль предельно возможной скорости распространения сигнала.***

1. Одновременность событий в СТО

По Ньютону, если два события происходят одновременно, это будет одновременно для любой системы отсчета (время абсолютно).

Возьмем два источника света на Земле: A и B (рис. 1.10.3).

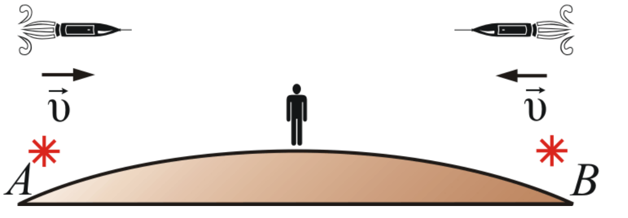


Рис. 1.10.3. В неподвижной системе k – в точках A и B – одновременно произошли два события в момент времени $t_1 = t_2 = t$. В движущейся системе k' (в ракете) эти события не одновременны: $t_1' \neq t_2'$

Если свет встретится на середине AB, то вспышки для человека, находящегося на Земле, будут одновременны. Но со стороны пролетающих мимо космонавтов со скоростью υ вспышки не будут казаться одновременными, т. к. $c = \text{const}$. Рассмотрим это более подробно.

Пусть в системе k (на Земле) в точках x_1 и x_2 происходят одновременно два события в момент времени $t_1 = t_2 = t.$ Будут ли эти события одновременны в k' (в пролетающей мимо ракете)?

Для определения координат в k' воспользуемся преобразованиями Лоренца:

$$x_1' = \frac{x_1 - \upsilon t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \; x_2' = \frac{x_2 - \upsilon t}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{1.10.5}$$

В соответствии с преобразованиями Лоренца для времени в системе k' получим:

$$t_1' = \frac{t - \frac{\upsilon x_1}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \; t_2' = \frac{t - \frac{\upsilon x_2}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{1.10.6}$$

Если события в системе k происходят одновременно в одном и том же месте, $x_1 = x_2$, то и $x_1' = x_2'$, т. е. и для k' эти события тоже одновременны.

Таким образом, события будут абсолютно ***одновременны*** в системах k и k', если они происходят в один и тот же момент времени $t_2' = t_1'$, в одном и том же месте $x_2' = x_1'$.

Если же в системе $x_1 \neq x_2$, то из уравнений (1.10.5) видно, что и в k' $x_1' \neq x_2'$, тогда из уравнений (1.10.6) следует, что *события в системе k' не одновременны,* т. е. $t_1' \neq t_2'$. ***Интервал времени между событиями*** в системе k'

$$t_2' - t_1' = \frac{\upsilon(x_1 - x_2)}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{1.10.7}$$

Разница во времени будет зависеть от υ, и она может отличаться по знаку (ракета подлетает с той или другой стороны).

2. Лоренцево сокращение длины

Рассмотрим рис. 1.10.4, на котором изображены две системы координат: k и k'. Пусть $l_0 = x_2' - x_1'$ – собственная длина тела в системе k', относительно которого тело неподвижно, например, в ракете, движущейся со скоростью $\upsilon \approx c$ мимо неподвижной системы отсчета k; $l = x_2 - x_1$ – длина тела в системе k. Измерение координат x_1 и x_2 производим одновременно в системе k и k', т. е. $t_1 = t_2 = t.$

Используя преобразования Лоренца, для координат получим

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1-\beta^2}}, \text{ или } l = l_0\sqrt{1-\beta^2}. \tag{1.10.8}$$

Формула (1.10.8) называется ***лоренцевым сокращением длины***. Собственная длина тела есть максимальная длина. Длина движущегося тела короче, чем покоящегося (рис. 1.10.5). Причем сокращается только проекция на ось x, т. е. размер тела вдоль направления движения.

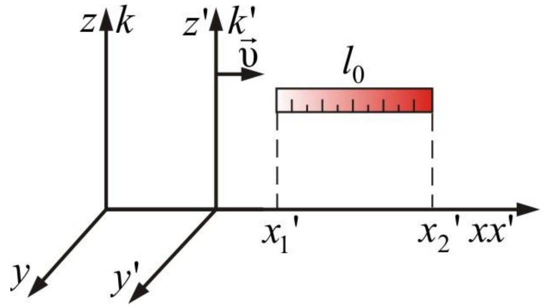


Рис. 1.10.4. Собственная длина линейки l_0 в движущейся системе k'

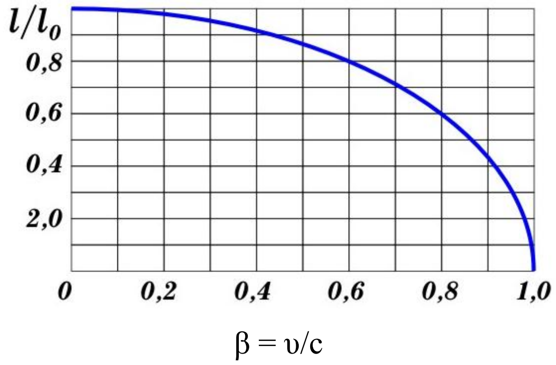


Рис. 1.10.5. Зависимость длины тела от скорости

3. Замедление времени

Пусть вспышка лампы на ракете длится $\Delta t_0 = \tau = t'_2 - t'_1$, где τ – собственное время, измеренное наблюдателем, движущимся вместе с часами. Чему равна длительность вспышки $(t_2 - t_1)$ с точки зрения человека, находящегося на Земле, мимо которого пролетает ракета?

Так как $x'_1 = x'_2$, то из преобразований Лоренца

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \text{ или } \Delta t = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (1.10.9)$$

Из этого уравнения следует, что ***собственное время – минимально*** (*движущиеся часы идут медленнее покоящихся*). Таким образом, вспышка на Земле будет казаться длиннее.

Этот вывод имеет множество экспериментальных подтверждений.

Это следствие из преобразований Лоренца объясняет известный всем «парадокс близнецов».

Итак, наряду с относительностью временных интервалов и пространственных расстояний даже одновременность событий не имеет абсолютного значения. Все они *относительны*, т. е. зависят от движения наблюдателя. В классической физике относительными были, например, скорости тел, их кинетические энергии. Теперь список подобных величин пополнился.

1.10.5. Сложение скоростей по Лоренцу

Скорость света – максимально возможная скорость распространения сигнала. Но что будет, если свет испускается движущимся источником в направлении его скорости υ (рис. 1.10.1)? Согласно закону сложения скоростей, следующему из преобразований Галилея, скорость света должна быть равна $c + \upsilon$. Но в теории относительности это невозможно. Получим закон сложения скоростей из преобразований Лоренца. Для этого запишем их для бесконечно малых величин:

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x' + \upsilon \mathrm{d}t'}{\sqrt{1-\beta^2}},\ \mathrm{d}y = \mathrm{d}y',\ \mathrm{d}z = \mathrm{d}z',\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t' + \dfrac{\upsilon \mathrm{d}x'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Разделив выражение dx на выражение dt, получим

$$\upsilon_x = \frac{\upsilon'_x + \upsilon}{1 + \upsilon'_x \upsilon / c^2}. \tag{1.10.10}$$

Эта формула выражает ***правило сложения скоростей*** в релятивистской механике.

Формулы обратного преобразования получаются при замене штрихованных величин на нештрихованные и обратно и заменой υ на $-\upsilon$.

В предельном случае, если движение происходит со скоростью света, то

$$\upsilon_x = \frac{c + c}{1 + c^2/c^2} = c.$$

Полученные формулы сложения скоростей запрещают движение со скоростью большей, чем скорость света. Уравнения Лоренца преобразуют время и пространство так, что свет распространяется с одинаковой скоростью, с точки зрения всех наблюдателей, независимо двигаются они или покоятся.

При медленных движениях, когда $\upsilon << c$, получаем нерелятивистские формулы, соответствующие преобразованиям Галилея. При этом ход течения времени и длина линейки будут одинаковы в обеих системах отсчета.

Таким образом, законы классической механики применимы, если скорости объектов много меньше скорости света. *Теория относительности* не зачеркнула достижения классической физики, она *установила рамки их справедливости.*

1.10.6. Релятивистская механика

Релятивистское выражение для импульса

Найдем такое выражение для импульса, чтобы закон сохранения импульса был инвариантен к преобразованиям Лоренца при любых скоростях (уравнения Ньютона не инвариантны к преобразованиям Лоренца, и закон сохранения импульса в системе k выполняется, а в k' – нет).

Ньютоновское выражение для импульса – $\vec{p} = m\dfrac{d\vec{r}}{dt}$, или $p = m\dfrac{dx}{dt}$.

В этом выражении m – масса частицы в системе k, ***инвариантная величина***; dt – интервал времени по часам неподвижного наблюдателя. Если заменить dt на $d\tau = dt\sqrt{1-\beta^2}$ – собственное время частицы (тоже инвариантная величина), то получим инвариантное выражение для импульса $p = m\dfrac{dx}{d\tau}$. Преобразуем это выражение с учетом того, что $dt = \dfrac{d\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}$:

$$p = m\frac{dx/dt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \text{ или } \vec{p} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{1.10.11}$$

Это и есть ***релятивистское выражение для импульса*** (рис. 1.10.6).

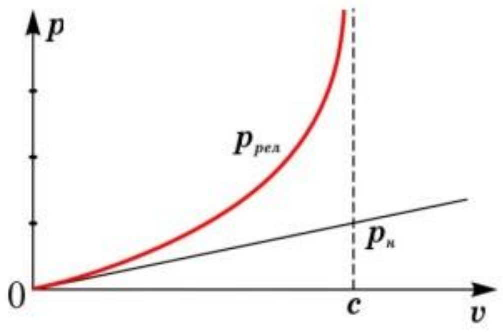


Рис. 1.10.6. Зависимость импульса частицы от скорости в классической и релятивистской механике. Когда скорость релятивистской частицы приближается к скорости света, ее импульс возрастает до бесконечности

Из уравнения (1.10.11) следует, что *никакое тело не может двигаться со скоростью, большей или даже равной скорости света* (при $\upsilon \to c$ знаменатель стремится к нулю, тогда $p \to \infty$, что невозможно в силу закона сохранения импульса).

Релятивистское выражение для энергии

По второму закону Ньютона скорость изменения импульса равна силе, действующей на частицу $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$. Работа силы по перемещению частицы идет на увеличение энергии частицы:

$$dA = \left(\vec{F}, d\vec{r}\right) = \left(\frac{d\vec{p}}{dt}, d\vec{r}\right) = \left(d\vec{p}, \vec{\upsilon}\right) = dE.$$

После интегрирования этого выражения получим ***релятивистское выражение для полной энергии*** частицы:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (1.10.12)$$

При $\upsilon = 0$ в системе координат, где частица покоится, выражение (1.10.12) преобразуется:

$$E_0 = mc^2 \qquad (1.10.13)$$

– ***энергия покоя***. Мы пришли к знаменитой ***формуле Эйнштейна***.

Выражение (1.10.13) является инвариантным относительно преобразований Лоренца.

Именно утверждение о том, что в покоящейся массе (материи) огромные запасы энергии, является главным практическим следствием СТО. E_0 – ***внутренняя энергия частицы*** (учитывающая все).

Полная энергия в теории относительности складывается из энергии покоя и кинетической энергии $E_к$. Тогда

$$E_к = E - E_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - mc^2 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right).$$

Как видно из графика зависимости кинетической энергии релятивистской частицы от ее скорости (рис. 1.10.7), *когда скорость частицы приближается к скорости света, ее энергия возрастает до бесконечности*.

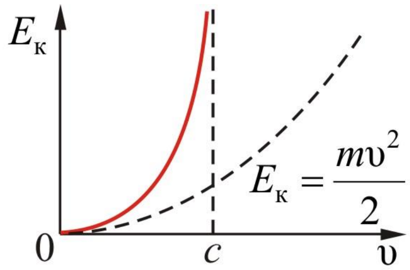


Рис. 1.10.7. Зависимость кинетической энергии релятивистской частицы от ее скорости. Пунктиром показана зависимость энергии классической частицы от скорости

Справедливость теории проверяется принципом соответствия: при $\upsilon \ll c$ (нерелятивистский предел) формула (1.10.11) примет вид $\vec{p} \approx m\vec{\upsilon}$, а выражение для энергии (1.10.12) преобразуется к виду $E_к \approx m\upsilon^2/2$.

Получим еще одно очень важное соотношение, связывающее полную энергию с импульсом частицы.

Из уравнения (1.10.11) получим

$$\upsilon^2 = \frac{p^2}{m^2 + \frac{p^2}{c^2}} = \frac{p^2c^2}{m^2c^2 + p^2}.$$

После подстановки этого выражения в (1.10.12) и необходимых преобразований получим:

$$E = c\sqrt{m^2c^2 + p^2}\,. \qquad (1.10.14)$$

Таким образом, получено инвариантное выражение, связывающее энергию и импульс.

Измеренные в разных системах координат E и p будут разными, но их разность будет одинакова в любой системе координат.

Изменяются при переходе из одной системы координат в другую лишь t, E, $\vec{\mathrm{p}}$, $\vec{\mathrm{r}}$, а m – *величина инвариантная*.

1.10.7. Взаимосвязь массы и энергии покоя

Масса и энергия покоя связаны уравнением

$$E_0 = mc^2, \qquad (1.10.15)$$

из которого вытекает, что всякое изменение массы Δm сопровождается изменением энергии покоя ΔE_0:

$$\Delta E_0 = c^2 \Delta m\,.$$

Это утверждение носит название закона ***взаимосвязи массы и энергии покоя***, оно стало символом современной физики.

Взаимосвязь между массой и энергией оценивалась А. Эйнштейном как самый значительный вывод специальной теории относительности. По его выражению, масса должна рассматриваться как «сосредоточение колоссального количества энергии». При этом масса в теории относительности не является более сохраняющейся величиной, а зависит от выбора системы отсчета и характера взаимодействия между частицами.

Определим энергию, содержащуюся в 1 г любого вещества, и сравним ее с химической энергией, равной $2{,}9 \cdot 10^4$ Дж, получаемой при сгорании 1 г угля. Согласно уравнению Эйнштейна $E = mc^2$, имеем:

$$E_0 = (10^{-3}\,\text{кг})(3 \cdot 10^8\,\text{м} \cdot \text{с}^{-1})^2 = 9 \cdot 10^{13}\,\text{Дж.}$$

Таким образом, собственная энергия в $3{,}1 \cdot 10^8$ раз превышает химическую энергию.

Из этого примера видно, что если высвобождается лишь одна тысячная доля собственной энергии, то и это количество в миллионы раз больше того, что могут дать обычные источники энергии.

Суммарная масса взаимодействующих частиц не сохраняется.

Рассмотрим другой пример. Пусть две одинаковые по массе частицы m движутся с одинаковыми по модулю скоростями навстречу друг другу и абсолютно неупруго столкнутся.

До соударения полная энергия каждой частицы E равна: $E = mc^2 / \sqrt{1-\beta^2}$. Полная энергия образовавшейся частицы Mc^2. Эта новая частица имеет скорость $\upsilon = 0$. Из закона сохранения энергии:

$$\frac{2mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = Mc^2,$$

отсюда M равно:

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1-\beta^2}} > 2m. \qquad (1.10.16)$$

Таким образом, *сумма масс исходных частиц* $2m$ *меньше массы образовавшейся частицы* M. В этом примере кинетическая энергия частиц превратилась в эквивалентное количество энергии покоя, а это привело к возрастанию массы:

$$\Delta M = \frac{\Delta K}{c^2}$$

(это при отсутствии выделения энергии при соударении частиц).

Пусть система (ядро) состоит из N частиц с массами m_1, m_2, …, m_i. Ядро не будет распадаться на отдельные частицы, если они связаны друг с другом. Эту связь можно охарактеризовать энергией связи $E_{св}$. *Энергия связи – энергия, которую нужно затратить, чтобы разорвать связь между частицами и разнести их на расстояние, при котором взаимодействием частиц друг с другом можно пренебречь*.

$$E_{св} = c^2 \sum_{i=1}^{n} m_i - Mc^2 = c^2 \Delta M, \qquad (1.10.17.)$$

где $\Delta M = (m_1 + m_2 + \ldots + m_i) - M$; ΔM – дефект массы.

Видно, что $E_{св}$ будет положительна, если $M < \sum_{i=1}^{n} m_i$, что и наблюдается на опыте.

При слиянии частиц энергия связи высвобождается (часто в виде электромагнитного излучения).

Например, ядро U^{238} имеет энергию связи

$$E_{св} = 2{,}9 \cdot 10^{-10} \text{ Дж} \approx 1{,}8 \cdot 10^{9} \text{ эВ} = 1{,}8 \text{ ГэВ}.$$

Ядерные реакции

Ядерной реакцией *называется процесс взаимодействия атомного ядра с элементарной частицей или другим ядром, приводящий к преобразованию исходного ядра*. Например:

$${}^{7}_{3}\mathrm{Li} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \to {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}.$$

Это реакция взаимодействия протона с ядром лития. Реакция протекает с выделением энергии.

В ядерной энергетике большой практический интерес имеют реакции с участием нейтронов, в частности реакция деления ядер ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$:

$$ {}^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{95}_{39}\mathrm{Y} + {}^{139}_{53}\mathrm{I} + 2\left({}^{1}_{0}n\right). $$

Реакция протекает при захвате ядрами ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ медленных нейтронов. Ядра иттрия и йода – это осколки деления. Ими могут быть и другие ядра. Характерно, что в каждом акте деления возникает 2–3 нейтрона, которые могут вызвать деление других ядер урана, причем так же с испусканием нейтронов. В результате количество делящихся ядер стремительно нарастает. Возникает *цепная ядерная реакция* с выделением большого количества энергии.

Устройство, в котором поддерживается управляемая реакция деления атомных ядер, называется *ядерным реактором.* Его основные элементы: ядерное топливо, замедлитель нейтронов, теплоноситель для отвода тепла и устройство для регулирования скорости реакции (рис. 1.10.8).

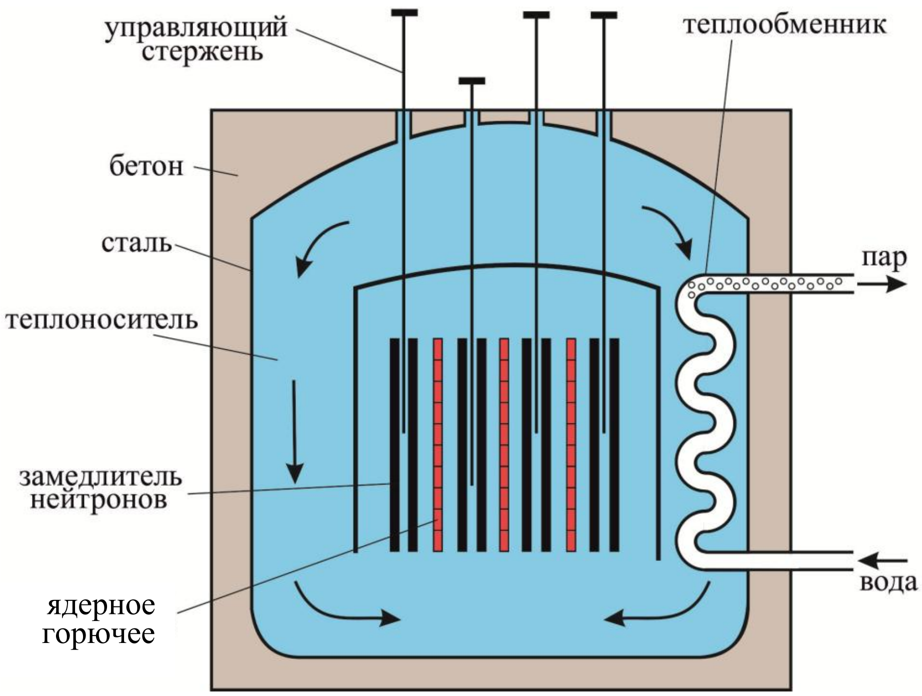


Рис. 1.10.8. Ядерный реактор

Термоядерные реакции

Термоядерные реакции *– это реакции синтеза легких ядер, протекающие при очень высоких температурах*. Высокие температуры необходимы для сообщения ядрам энергии, достаточной для того, чтобы сблизиться до расстояния, сравнимого с радиусом действия ядерных сил (10^{-15} м).

Энергия, выделяющаяся в процессе термоядерных реакций в расчете на один нуклон, существенно превышает удельную энергию, выделяющуюся в процессе реакций деления тяжелых ядер. Так, при синтезе тяжелого водорода – дейтерия, со сверхтяжелым изотопом водорода – тритием, выделяется энергия около 3,5 МэВ на один нуклон, в то время как в процессе деления ядер урана, выделяется примерно 0,85 МэВ энергии на один нуклон.

Термоядерная реакция синтеза дейтерия с тритием наиболее перспективна в плане получения практически неисчерпаемого источника энергии (рис. 1.10.9):

$$^{2}_{1}\mathrm{H} + ^{3}_{1}\mathrm{H} \rightarrow ^{4}_{2}\mathrm{He} + ^{4}_{2}\mathrm{He} + ^{1}_{0}n + 17{,}6\ \text{МэВ}.$$

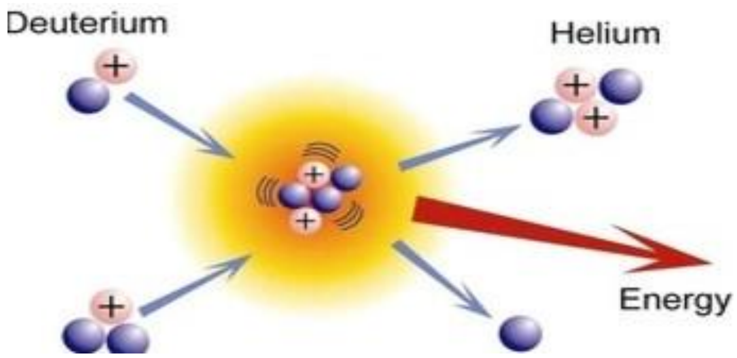


Рис. 1.10.9

Однако осуществление такой реакции в управляемом режиме, равно как и других реакций синтеза, в настоящее время является пока проблемной задачей, хотя успехи в этом направлении несомненны. В настоящее время уже получена плазма, температура которой порядка $2 \cdot 10^{8}$ К, а время удержания не менее 2 с при выделяемой мощности до 2 МВт.

На рис. 1.10.10 изображена одна из моделей термоядерного реактора ТОКАМАК.

Есть надежда, что термоядерный реактор практического применения будет создан уже в первой четверти XXI века.

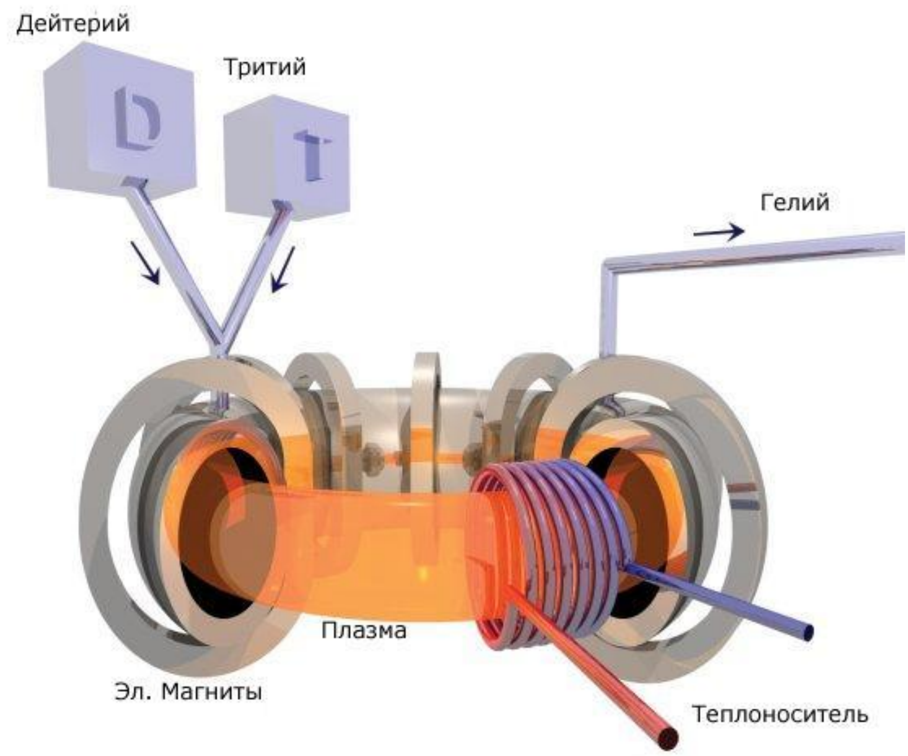


Рис. 1.10.10. Модель термоядерного реактора ТОКАМАК

Выделяется в виде энергии не более 0,1 % массы вещества. Полностью энергия покоя выделяется только при ***аннигиляции*** в виде электромагнитного излучения, как, например, при *аннигиляции электрона* и *позитрона* (рис. 1.10.11).

На рис. 1.10.12 представлен фотоснимок треков частиц при аннигиляции антипротона на протоне.

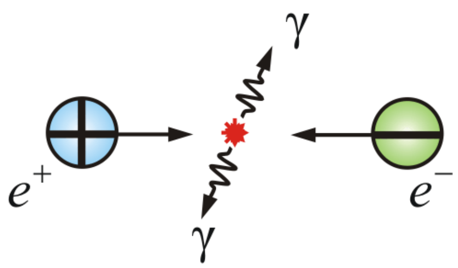


Рис. 1.10.11. Схема аннигиляции электрона и позитрона

Рис.1.10.12. Треки частиц при аннигиляции антипротона на протоне

Контрольные вопросы. Упражнения

1. В чем физическая сущность механического принципа относительности?
2. В чем заключается правило сложения скоростей в классической механике?
3. Каковы причины возникновения специальной теории относительности?
4. В чем заключаются основные постулаты специальной теории относительности?
5. Зависит ли от скорости движения системы отсчета скорость тела? Скорость света?
6. Запишите и прокомментируйте преобразования Лоренца. При каких условиях они переходят в преобразования Галилея?
7. Какой вывод о пространстве и времени можно сделать на основе преобразований Лоренца?
8. Одновременны ли события в системе K', если в системе K они происходят в одной точке и одновременны? В системе K события разобщены, но одновременны? Обоснуйте ответ.
9. Какие следствия вытекают из специальной теории относительности для размеров тел и длительности событий в разных системах отсчета? Обоснуйте ответ.
10. При какой скорости движения релятивистское сокращение длины движущегося тела составит 25 %?
11. В чем состоит «парадокс близнецов», и как его разрешить?
12. В чем заключается релятивистский закон сложения скоростей? Как показать, что он находится в согласии с постулатами Эйнштейна?
13. Как определяется интервал между событиями? Докажите, что он является инвариантом при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.
14. Какой вид имеет основной закон релятивистской динамики? Чем он отличается от основного закона ньютоновской механики?
15. В чем заключается закон сохранения релятивистского импульса?
16. Как выражается кинетическая энергия в релятивистской механике? При каком условии релятивистская формула для кинетической энергии переходит в классическую формулу? Сделайте этот переход.
17. Сформулируйте и запишите закон взаимосвязи массы и энергии. В чем его физическая сущность? Приведите примеры его экспериментального подтверждения.
18. Почему формула, связывающая массу и энергию, не может быть названа формулой превращения массы в энергию, а является формулой соотношения между этими величинами?

Бросая в воду камушки, смотри на круги, ими образуемые. Иначе такое бросание будет пустою забавою.

Козьма Прутков. Плоды раздумья

2. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

2.1. Гармонические колебания

Несмотря на большое число колебательных явлений, встречающихся в нашей жизни (звук, свет, радиоволны), существуют общие закономерности этих явлений. Поэтому основные учения о гармонических колебаниях, которые рассматриваются здесь, должны стать фундаментом для изучения любых видов колебаний.

2.1.1. Виды и признаки колебаний

В физике особенно выделяют колебания двух видов: *механические и электромагнитные и их электромеханические комбинации*.

Для колебаний характерно превращение одного вида энергии в другой: кинетической в потенциальную, магнитной в электрическую и т. д.

Колебательным движением называются процессы, отличающиеся той или иной степенью повторяемости во времени.

Говоря о колебаниях или осцилляциях тела, мы подразумеваем повторяющееся движение его туда и обратно по одной и той же траектории. Иными словами, такое движение является ***периодическим.*** Простейшим примером периодического движения служат ***колебания груза массой m на конце пружины*** (рис. 2.1.1). Многие другие виды колебательных движений проявляют большое сходство с этими колебаниями, поэтому разберем этот пример подробно.

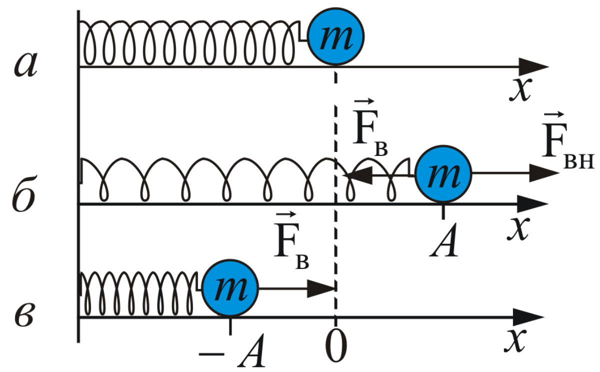


Рис. 2.1.1. Колебание груза на пружине

Если на пружину не действуют силы, то в этом случае она находится в *положении равновесия*: $x = 0$ (рис. 2.1.1, *а*).

Для того чтобы растянуть пружину на длину x, к ней надо приложить *внешнюю силу* (рис. 2.1.1, *б*), которая по закону Гука определяется как

$$F_{вн} = +kx,$$

где k – *жесткость пружины*.

Пружина действует на груз с *возвращающей силой*

$$F_{в} = -kx,$$

которая стремится вернуть ее в *положение равновесия*.

Когда груз, проскочив положение равновесия, движется влево, сила со стороны пружины замедляет его в точке $x = -A$ (рис. 2.1.1, *в*). Графически такой колебательный процесс изображен на рис. 2.1.2.

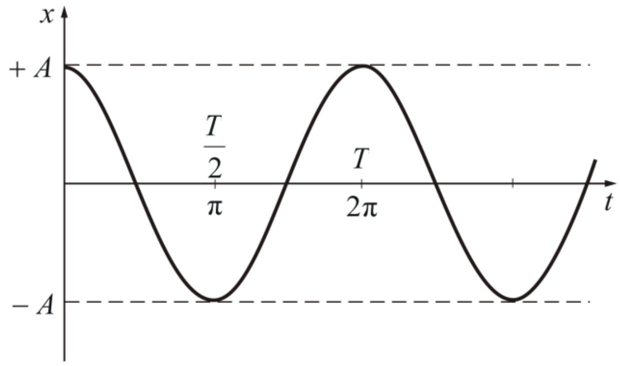


Рис. 2.1.2. Гармонические колебания

***Существует три признака колебательного движения*:**

- ***повторяемость*** (***периодичность***) – *движение по одной и той же траектории туда и обратно*;
- ***ограниченность*** *пределами крайних положений*;
- ***действие силы***, *описываемой функцией* $F = -kx$.

Колебания называются *периодическими*, если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебаний, повторяются через равные промежутки времени. Простейшим типом периодических колебаний являются так называемые ***гармонические колебания***.

Любая колебательная система, в которой возвращающая сила прямо пропорциональна смещению, взятому с противоположным знаком (например, $F = -kx$), совершает *гармонические колебания*. Такую систему часто называют *гармоническим осциллятором*.

Периодический процесс можно описать уравнением

$$f(t) = f(t + nT).$$

По определению колебания называются *гармоническими*, если зависимость некоторой величины $x = f(t)$ имеет вид (рис. 2.1.2):

$$x = A\cos\varphi \text{ или } x = A\sin\varphi. \quad (2.1.1)$$

Здесь синус или косинус используются в зависимости от условия задачи, A и φ – параметры колебаний, которые мы рассмотрим ниже.

2.1.2. Параметры гармонических колебаний

К параметрам гармонических колебаний относятся: смещение, амплитуда, фаза колебаний и т. д.

- Расстояние груза от положения равновесия до точки, в которой находится груз, называют ***смещением*** x.
- *Максимальное смещение* – наибольшее расстояние от положения равновесия – называется ***амплитудой*** и обозначается буквой A.
- Выражение, стоящее под знаком синуса или косинуса в формуле (1.1.2), $\omega t + \varphi$ определяет смещение x в данный момент времени t и называется ***фазой колебания***.
- Величина φ называется ***начальной фазой колебания*** и определяет смещение в начальный момент времени ($t = 0$).

Фаза измеряется в радианах и определяет *значение колеблющейся величины* в данный момент времени.

Так как синус и косинус изменяются в пределах от +1 до -1, то x может принимать значения от $+A$ до $-A$ (рис. 2.1.2).

- Движение от некоторой начальной точки до возвращения в ту же точку, например от $x = A$ к $x = -A$ и обратно в $x = A$, называется ***полным колебанием***. ***Частота колебаний*** ν определяется *как число полных колебаний в* 1 *секунду*. Частоту, как правило, измеряют в герцах (Гц): 1 Гц равен одному полному колебанию в секунду. Очевидно, что

$$\nu = \frac{1}{T}. \tag{2.1.2}$$

- T – ***период колебаний*** – минимальный промежуток времени, по истечении которого повторяются значения всех физических величин, характеризующих колебание

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{\nu}. \tag{2.1.3}$$

- ω_0 – ***циклическая (круговая) частота*** – число полных колебаний за 2π секунд:

$$\omega_0 = 2\pi\nu. \tag{2.1.4}$$

Частота и период гармонических колебаний не зависят от амплитуды. Изменяя амплитуду колебаний груза на пружине, мы не изменяем частоту колебаний этой системы.

Колебания характеризуются не только смещением, но и ***скоростью*** υ_x, и ***ускорением*** a_x.

Если смещение описывается уравнением $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$, то, по определению,

$$\upsilon_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \varphi); \qquad (2.1.5)$$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}\upsilon_x}{\mathrm{d}t} = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi). \qquad (2.1.6)$$

В этих уравнениях $\upsilon_m = \omega_0 A$ – ***амплитуда скорости***; $a_m = \omega_0^2$ – ***амплитуда ускорения***.

Из уравнений (2.1.5) и (2.1.6) видно, что скорость и ускорение также являются гармоническими колебаниями.

2.1.3. Графики смещения скорости и ускорения

Параметры колебаний запишем в виде системы уравнений

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega_0 t + \varphi); \\ \upsilon_x = -\upsilon_m \sin(\omega_0 t + \varphi); \\ a_x = -a_m \cos(\omega_0 t + \varphi). \end{cases} \qquad (2.1.7)$$

Из этой системы уравнений можно сделать следующие выводы:

- *скорость колебаний тела максимальна и по абсолютной величине равна амплитуде скорости в момент прохождения через положение равновесия* ($x = 0$). *При максимальном смещении* ($x = \pm A$) *скорость равна нулю*;
- *ускорение равно нулю при прохождении телом положения равновесия и достигает наибольшего значения, равного амплитуде ускорения при наибольших смещениях*.

Ускорение всегда направлено к положению равновесия, поэтому, удаляясь от положения равновесия, тело двигается замедленно, приближаясь к нему – ускоренно. Ускорение всегда прямо пропорционально смещению, а его направление противоположно направлению смещения. Все эти выводы могут служить определением гармонического колебания.

Графики смещения скорости и ускорения гармонических колебаний приведены на рис. 2.1.3.

Начальная фаза φ_0 определяется из начальных условий конкретной задачи (точно так же, как и амплитуда A).

Найдем разность фаз $\Delta\varphi$ между фазами смещения x и скорости υ_x. Для этого воспользуемся системой уравнений (2.1.7)

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega_0 t + \varphi) = A\cos\varphi_x, \\ \upsilon_x = \upsilon_m \sin(\omega_0 t + \varphi) = \upsilon_m \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2) = \upsilon_m \cos\varphi_\upsilon. \end{cases}$$

Отсюда видно, что

$$\Delta\varphi = \varphi_x - \varphi_\upsilon = \pi / 2, \qquad (2.1.8)$$

т. е. ***скорость опережает смещение по фазе на*** π/2.

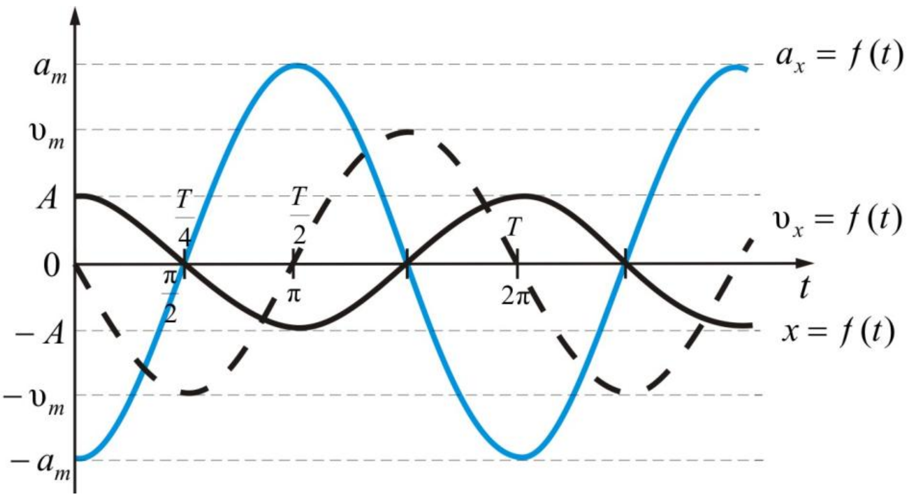


Рис. 2.1.3. Графики смещения скорости и ускорения гармонических колебаний

Аналогично можно показать, что ***ускорение***, в свою очередь, ***опережает скорость по фазе на*** π/2:

$$a_x = -a_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = a_m \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi) = a_m \cos\varphi_a;$$

т. к. $-\cos\alpha = \cos(\pi + \alpha)$,

то

$$\varphi_a - \varphi_\upsilon = \omega_0 t + \varphi + \pi - \omega_0 t - \varphi - \pi / 2 = \pi / 2,$$

или

$$\varphi_\upsilon - \varphi_a = -\pi / 2. \qquad (2.1.9)$$

Тогда ***ускорение опережает смещение*** на π,

$$\varphi_x - \varphi_a = -\pi, \qquad (2.1.10)$$

т. е. ***смещение и ускорение находятся в противофазе*** (рис. 2.1.3).

2.1.4. Основное уравнение динамики гармонических колебаний

Второй закон Ньютона позволяет в общем виде записать связь между силой и ускорением при прямолинейных гармонических колебаниях материальной точки (или тела) с массой m.

Исходя из второго закона Ньютона $(F = ma)$ можно записать:

$$F_x = -m\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi) = -m\omega_0^2 x, \qquad (2.1.11)$$

где F_x – проекция силы на направление x. Из этого выражения следует, что ***сила** F **пропорциональна** x **и всегда направлена к положению равновесия*** (поэтому ее и называют ***возвращающей силой***). Период и фаза силы совпадают с периодом и фазой ускорения.

Примером сил, удовлетворяющих уравнению (2.1.11), являются ***упругие силы***. Силы же, имеющие иную природу, но удовлетворяющие (2.1.11), называются ***квазиупругими***. Квазиупругая сила

$$F_x = -kx, \tag{2.1.12}$$

где k – коэффициент квазиупругой силы.

Сравнивая уравнения (2.1.11) и (2.1.12), видим, что $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$.

В случае прямолинейных колебаний вдоль оси x проекция ускорения на эту ось $a_x = \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$.

Подставив выражения для a_x и F_x во второй закон Ньютона, получим ***основное уравнение динамики гармонических колебаний***, вызываемых упругими или квазиупругими силами:

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx, \text{ или } m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + kx = 0;\ \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0. \tag{2.1.13}$$

Решением этого уравнения всегда будет выражение вида

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi),$$

т. е. смещение груза под действием упругой или квазиупругой силы является *гармоническим колебанием, происходящим по синусоидальному закону.*

Круговая частота незатухающих колебаний $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$, но т. к.

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \text{ то } \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}};$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{2.1.14}$$

Из формулы для периода колебаний видно, что чем больше жесткость пружины k, тем меньше период (больше частота), а чем больше масса, тем период колебаний больше.

2.1.5. Энергия гармонических колебаний

Вычислим энергию тела массой m, совершающего гармонические колебания с амплитудой A и круговой частотой ω (рис. 2.1.1):

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Потенциальная энергия $E_п$ ***тела***, смещенного на расстояние x от положения равновесия, измеряется той работой, которую произведет возвращающая сила $F_x = -kx$, перемещая тело в положение равновесия:

$$F_x = -\frac{dE_п}{dx}; \quad dE_п = -F dx = kx dx;$$

$$E_п = k\int_0^x x dx, \text{ или } E_п = kx^2/2; \tag{2.1.15}$$

$$E_п = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi). \tag{2.1.16}$$

Кинетическая энергия

$$E_п = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi). \tag{2.1.17}$$

Заменив в уравнении (2.1.16) $k = m\omega_0^2$ и сложив почленно уравнения (2.1.16) и (2.1.17), получим выражение для ***полной энергии:***

$$E = E_п + E_к = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2\left[\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi)\right] = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2,$$

или

$$E = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2. \tag{2.1.18}$$

Полная механическая энергия гармонически колеблющегося тела пропорциональна квадрату амплитуды колебания.

В случае свободных незатухающих колебаний полная энергия не зависит от времени, поэтому и амплитуда A не зависит от времени.

Из уравнений (2.1.16) и (2.1.17) видно, что и потенциальная $E_п$, и кинетическая $E_к$ энергии пропорциональны квадрату амплитуды A^2.

На рис. 2.1.4 приведены колебания груза под действием сил тяжести.

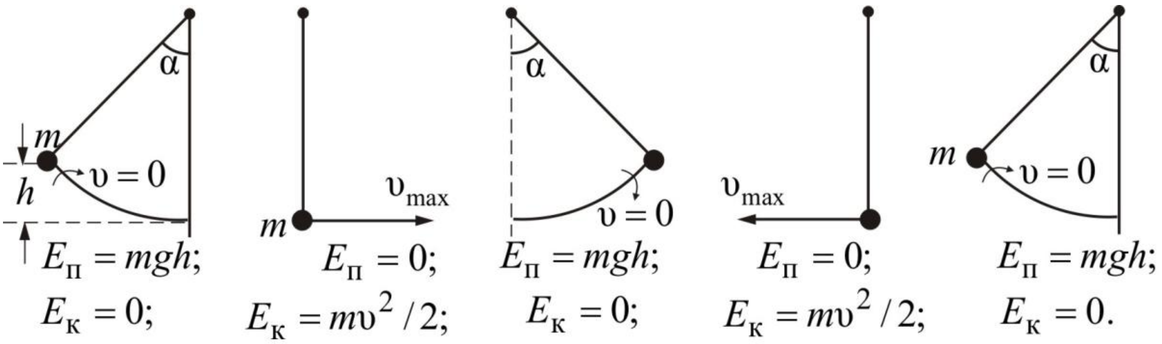


Рис. 2.1.4. Колебания груза массой m под действием силы тяжести

Из рис. 2.1.4 и из формул (2.1.16) и (2.1.17) видно, что $E_п$ и $E_к$ изменяются периодически (при свободных незатухающих колебаниях). Однако период изменения энергии в два раза меньше, чем период изменения смещения скорости и ускорения.

При колебаниях, совершающихся под действием потенциальных (консервативных) сил, происходит переход кинетической энергии в потенциальную и наоборот, но их сумма в любой момент времени постоянна.

На рис. 2.1.5 приведена кривая потенциальной энергии.

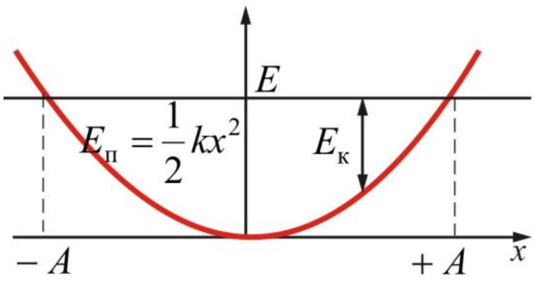


Рис. 2.1.5. Кривая потенциальной энергии

Горизонтальная линия соответствует определенному значению полной энергии: $E = 1/2\,kA^2$. Расстояние от этой линии до кривой равно кинетической энергии, а движение ограничено значениями x, заключенными в пределах от $+A$ до $-A$. Эти результаты полностью согласуются с полным решением уравнения движения.

2.1.6. Гармонические осцилляторы

Колебания гармонического осциллятора являются важным примером периодического движения и служат точной или приближенной моделью во многих задачах классической и квантовой физики. Примерами гармонического осциллятора являются: *пружинный*, *математический и физический маятники*, а также *колебательный контур* (для малых токов и напряжений).

- ***Пружинный маятник*** *– это груз массой m, подвешенный на абсолютно упругой пружине с жесткостью k, совершающий гармонические колебания под действием упругой силы $F = -kx$.*

Уравнение движения маятника:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \text{ или } \frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0. \qquad (2.1.19)$$

Из сравнения выражений (2.1.13) и (2.1.19) следует, что пружинный маятник совершает гармонические колебания по закону $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ с циклической частотой ω_0 и периодом T, где

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}\,;\; T = 2\pi\sqrt{m/k}\,.$$

Эти формулы справедливы для упругих колебаний в пределах, когда выполняется закон Гука, т. е. когда масса пружины мала по сравнению с массой тела и ее деформация не превышает предела упругости.

- ***Математическим маятником*** *называется идеализированная система, состоящая из невесомой нерастяжимой нити, на которую подвешена масса, сосредоточенная в одной точке* (шарик на длинной тонкой нити), рис. 2.1.6. Если масса произвольным образом рассредоточена по всему телу, то маятник называют ***физическим*** (рис. 2.1.7).

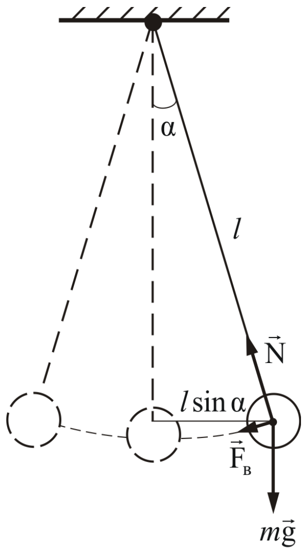


Рис. 2.1.6. Математический маятник

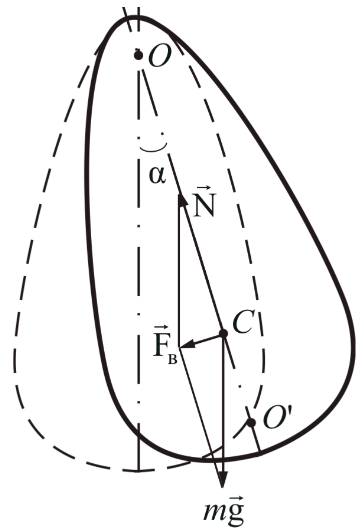


Рис. 2.1.7. Физический маятник

Рассмотрим условия, при которых колебания математического маятника являются гармоническими.

Отклонения маятника от положения равновесия будем характеризовать углом α, образованным нитью с вертикалью.

При отклонении маятника от вертикали возникает ***вращающий момент***, модуль которого $\left|\vec{\mathrm{M}}\right| = mgl\sin\alpha$. Он имеет такое направление, что стремится вернуть маятник в положение равновесия, и в этом отношении он аналогичен квазиупругой силе. Поэтому можно записать:

$$M = -mgl\sin\alpha. \qquad (2.1.20)$$

Уравнение динамики вращательного движения для маятника –

$$M = J\varepsilon,$$

где $J = ml^2$ – момент инерции маятника; $\varepsilon = \dfrac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2}$ – угловое ускорение.

Тогда $ml^2\dfrac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} = -mgl\sin\alpha$, или $\dfrac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{g}{l}\sin\alpha = 0$.

Рассмотрим колебания с *малой амплитудой*, т. е. $\sin\alpha \approx \alpha$, и введем обозначение $g/l = \omega_0^2$. Тогда получим ***уравнение движения маятника:***

$$\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\alpha = 0. \tag{2.1.21}$$

Это ***уравнение динамики гармонических колебаний***. Решение этого уравнения имеет вид:

$$\alpha = \alpha_m \cos(\omega_0 t + \varphi). \tag{2.1.22}$$

Следовательно, *при малых колебаниях угловое отклонение* математического маятника изменяется во времени по *гармоническому закону*.

Циклическая частота колебаний $\omega_0 = \sqrt{g/l} = 2\pi/T$, тогда период

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{2.1.23}$$

т. е. период *T зависит только от длины маятника и ускорения свободного падения.*

- ***Физический маятник*** *– это твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку O, не совпадающую с центром масс C* (рис. 2.1.7).

При отклонении этого тела от положения равновесия на угол α также возникает ***вращающий момент***, стремящийся вернуть маятник в положение равновесия:

$$M = -mgl\sin\alpha,$$

где l – расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника C.

Обозначим через J момент инерции маятника:

$$J\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} = -mgl\sin\alpha. \tag{2.1.24}$$

В случае малых колебаний ($\sin\alpha = \alpha$) уравнение (2.1.24) переходит в известное нам уравнение $\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\alpha = 0$. Его решение –

$$\alpha = \alpha_m \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где $\omega_0^2 = mgl/J$.

Из выражения (2.1.23) следует, что физический маятник при малых отклонениях также совершает гармонические колебания, частота которых зависит от массы и момента инерции маятника. Аналогично уравнению (1.6.5) получим

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}\,. \qquad (2.1.25)$$

Величину момента инерции J иногда бывает трудно вычислить.

Сопоставляя уравнения (1.6.5) и (1.6.7), получим, что физический маятник с длиной $l_{\text{пр}}$ будет иметь такой же период колебаний, как и математический:

$$l_{\text{пр}} = \frac{J}{ml} \text{ и } T = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{пр}}}{g}}\,.$$

Здесь $l_{\text{пр}}$ – *приведенная длина физического маятника* – это длина такого математического маятника, период колебания которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

Точка O' на продолжении прямой OC, отстоящая от точки подвеса O на расстоянии приведенной длины $l_{\text{пр}}$, называется *центром качаний* физического маятника. Применяя теорему Штейнера, получим

$$l_{\text{пр}} = \frac{J}{ml} = \frac{J_C + ml^2}{ml} = \frac{J_C}{ml} + l > l\,,$$

т. е. $l_{\text{пр}}$ всегда больше l. Точки O и O' всегда будут лежать по обе стороны от точки C.

Точка подвеса O маятника и центр качаний O' обладают *свойством взаимозаменяемости*: если маятник *перевернуть* и подвесить за точку O', то прежняя точка O станет центром качаний и период колебаний физического маятника не изменится.

На этом свойстве основано определение ускорения силы тяжести g с помощью так называемого ***оборотного маятника***. *Это такой маятник, у которого имеются две точки подвеса и два груза, которые могут перемещаться вдоль оси маятника.* Перемещением грузов добиваются того, что расстояние между точками подвеса будет соответствовать $l_{\text{пр}}$. Тогда, измерив период T и $l_{\text{пр}}$, легко рассчитать g по (1.6.9).

Физический и математический маятники совершают гармонические колебания при малых углах отклонения (меньше 15°), т. е. длина дуги $x = l\alpha$ мало отличается от длины хорды $l\sin\alpha$ (менее 1 %).

Контрольные вопросы. Упражнения

1. Что такое колебания? Свободные колебания? Гармонические колебания? Периодические процессы?
2. Почему возможен единый подход при изучении колебаний различной физической природы?
3. Дайте определение амплитуды, фазы, период, частоты, циклической частоты колебания.
4. В чем заключается идея метода вращающегося вектора амплитуды?
5. Выведите формулы для скорости и ускорения гармонически колеблющейся точки как функции времени.
6. От чего зависят амплитуда и начальная фаза гармонических колебаний?
7. Выведите и прокомментируйте формулы для кинетической, потенциальной и полной энергии при гармонических колебаниях.
8. Чему равно отношение полной энергии гармонического колебания и максимальному значению возвращающей силы, вызывающей это колебание?
9. Как можно сравнить между собой массы тела, измеряя частоты колебаний при подвешивании этих масс к пружине?
10. Что называется гармоническим осциллятором? Пружинным маятником? Физическим? Математическим?
11. Выведите формулы для периодов колебаний пружинного, физического и математического маятников.
12. Что такое приведенная длина физического маятника?
13. Какие процессы происходят при свободных гармонических колебаниях? Чем определяется период?
14. Запишите и проанализируйте дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний.

2.2. Сложение гармонических колебаний

При всех сложениях колебаний различают сложение колебаний, совершающихся в одном направлении и сложение колебаний, совершающихся во взаимно перпендикулярных направлениях.

2.2.1. Способы представления колебаний

Гармонические колебания можно представить несколькими способами:

- аналитическим:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi); \quad \upsilon_x = \upsilon_m \sin(\omega_0 t + \varphi); \quad a_x = -a_m \sin(\omega_0 t + \varphi);$$

- графическим (рис. 2.1.2 и 2.1.3);
- геометрическим, с помощью вектора амплитуды (метод векторных диаграмм), рис. 2.2.1.

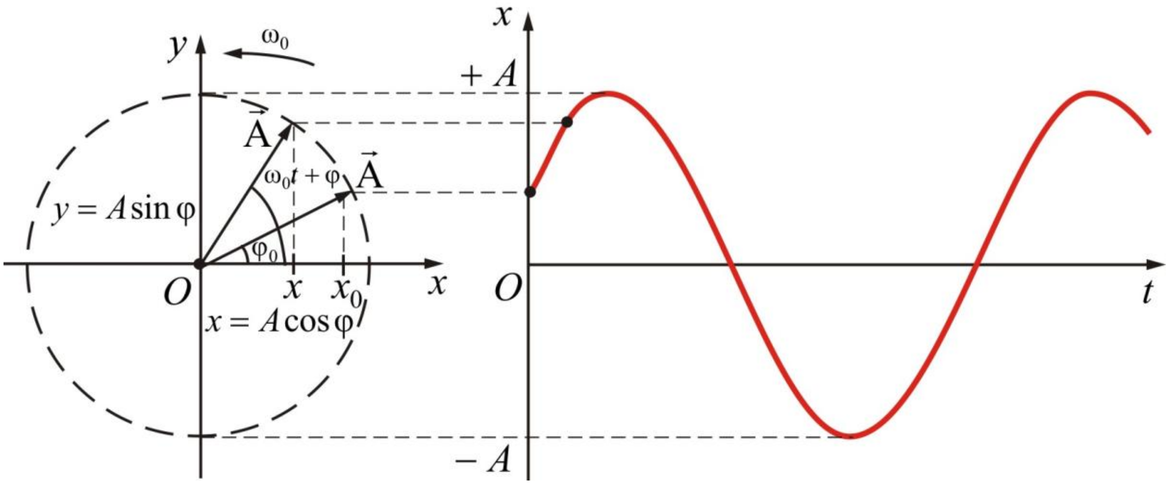


Рис. 2.2.1. Графическое представление колебаний (метод векторных диаграмм)

Пусть гармоническое колебание описывается уравнением $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$. Проведем прямую *Ox* (опорную) и построим вектор $\vec{A}$, направленный из точки *O* под углом φ к опорной линии.

Обозначим через x_0 проекцию вектора $\vec{A}$ на опорную линию в момент времени $t = 0$:

$$x_0 = A\cos\varphi.$$

Вращение происходит против часовой стрелки, т. е. $\omega_0 > 0$. За промежуток времени *t* вектор амплитуды повернется на угол ω*t* и займет новое положение. Его проекция на опорную линию равна

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Вращающийся вектор амплитуды полностью характеризует гармоническое колебание.

Проекция кругового движения на ось *y* также совершает гармоническое колебание $y = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$. Таким образом, равномерное движение по окружности можно рассматривать как два колебательных гармонических движения, совершаемых одновременно в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Этим представлением широко пользуются при сложении колебаний.

2.2.2. Сложение гармонических колебаний. Биения

Пусть точка одновременно участвует в двух гармонических колебаниях одинакового периода, направленных вдоль одной прямой.

Сложение колебаний будем проводить методом векторных диаграмм (рис. 2.2.2). Пусть колебания заданы уравнениями

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \text{ и } x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2). \qquad (2.2.1)$$

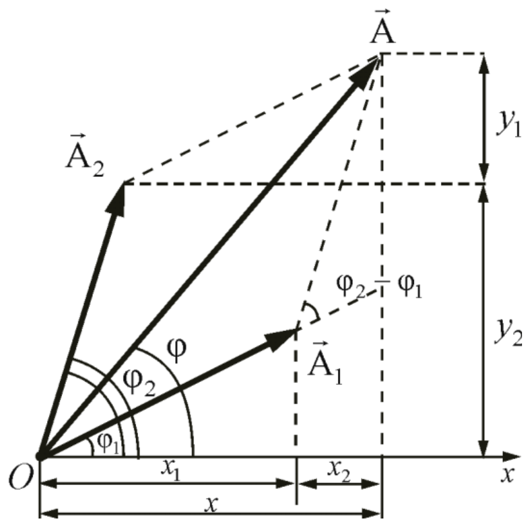


Рис. 2.2.2. Сложение гармонических колебаний одного направления (x_1 и x_2) методом векторных диаграмм

Отложим из точки O вектор $\vec{A}_1$ под углом φ_1 к опорной линии и вектор $\vec{A}_2$ под углом φ_2. Оба вектора вращаются против часовой стрелки с одинаковой угловой скоростью ω, поэтому их разность фаз не зависит от времени ($\varphi_2 - \varphi_1 = \text{const}$). Такие колебания называют ***когерентными***.

Известно, что суммарная проекция вектора $\vec{A}$ равна сумме проекций на эту же ось. Поэтому результирующее колебание может быть изображено вектором амплитуды $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$, вращающимся вокруг точки O с той же угловой скоростью ω_0, что и $\vec{A}_1$, и $\vec{A}_2$. Результирующее колебание должно быть также гармоническим с частотой ω:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi).$$

По правилу сложения векторов найдем суммарную амплитуду:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1). \qquad (2.2.2)$$

Начальная фаза определяется из соотношения

$$\text{tg}\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}. \qquad (2.2.3)$$

Таким образом, тело, участвуя в двух гармонических колебаниях одного направления и одинаковой частоты, совершает так же гармоническое колебание в том же направлении и с той же частотой, что и складываемые колебания.

Из (2.2.2) следует, что амплитуда A результирующего колебания зависит от разности начальных фаз $\varphi_2 - \varphi_1$. Возможные значения A лежат в диапазоне $|A_2 - A_1| \le A \le A_2 + A_1$ (амплитуда не может быть отрицательной).

Рассмотрим несколько простых случаев:

1. Разность фаз равна нулю или четному числу π, т. е. $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, тогда $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$ и

$$A = A_1 + A_2, \tag{2.2.4}$$

т. е. амплитуда результирующего колебания A равна сумме амплитуд складываемых колебаний (колебания *синфазны*), рис. 2.2.3.

2. Разность фаз равна нечетному числу π, т. е. $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi(2n+1)$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, тогда $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$. Отсюда

$$A = \left|A_2 - A_1\right|. \tag{2.2.5}$$

Амплитуда результирующего колебания A равна разности амплитуд складываемых колебаний (колебания в *противофазе*), рис. 2.2.4.

3. Разность фаз изменяется во времени произвольным образом:

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos[\omega_1 t + \varphi_1(t)]; \\ x_2 = A_2 \cos\left[\omega_2 t + \varphi_2(t)\right]. \end{cases}$$

Из этих уравнений следует, что $A \ne \text{const}$ и будет изменяться в соответствии с величиной $\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$. В результате сложения этих колебаний получаются колебания с периодически изменяющейся амплитудой.

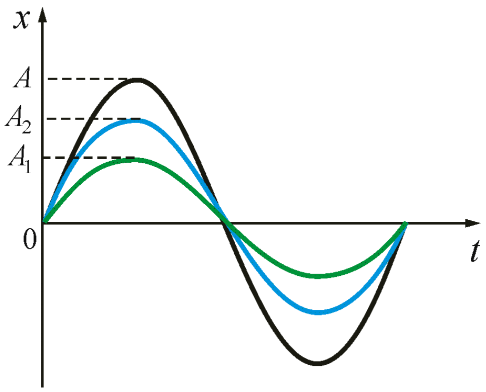


Рис. 2.2.3. Синфазные колебания

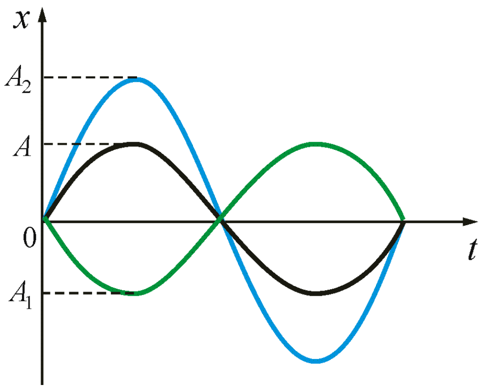


Рис. 2.2.4. Колебания в противофазе

Периодические изменения амплитуды колебания, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами, называются ***биениями***. Строго говоря, это уже не гармонические колебания.

Пусть амплитуды складываемых колебаний равны A, а частоты равны ω_0 и $\omega_0 + \Delta\omega$, причем $\Delta\omega << \omega_0$. Начало отсчета выбираем так, чтобы начальные фазы обоих колебаний были равны нулю:

$$x_1 = A\cos\omega t; \;\; x_2 = A\cos(\omega + \Delta\omega)t.$$

Сложим эти выражения, пренебрегая $\frac{\Delta\omega}{2}t$, т. к. $\frac{\Delta\omega}{2}t << 2\omega t$;

$$x = A\left[\cos\omega t + \cos(\omega + \Delta\omega)t\right] = \left(2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\omega t. \qquad (2.2.6)$$

Результирующее колебание (2.2.6) можно рассматривать как гармоническое с частотой ω и амплитудой $A_б$, которая изменяется по следующему периодическому закону:

$$A_б = \left|2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right|, \qquad (2.2.7)$$

тогда $x = A_б\cos\omega t$.

Характер зависимости (2.2.7) показан на рис. 2.2.5, где сплошные жирные линии дают график результирующего колебания, а огибающие их – график медленно меняющейся по уравнению (2.2.7) амплитуды.

Определение частоты тона (звука определенной высоты) биений между эталонным и измеряемым колебаниями – наиболее широко применяемый на практике метод сравнения измеряемой величины с эталонной. Метод биений используется для настройки музыкальных инструментов, анализа слуха и т. д.

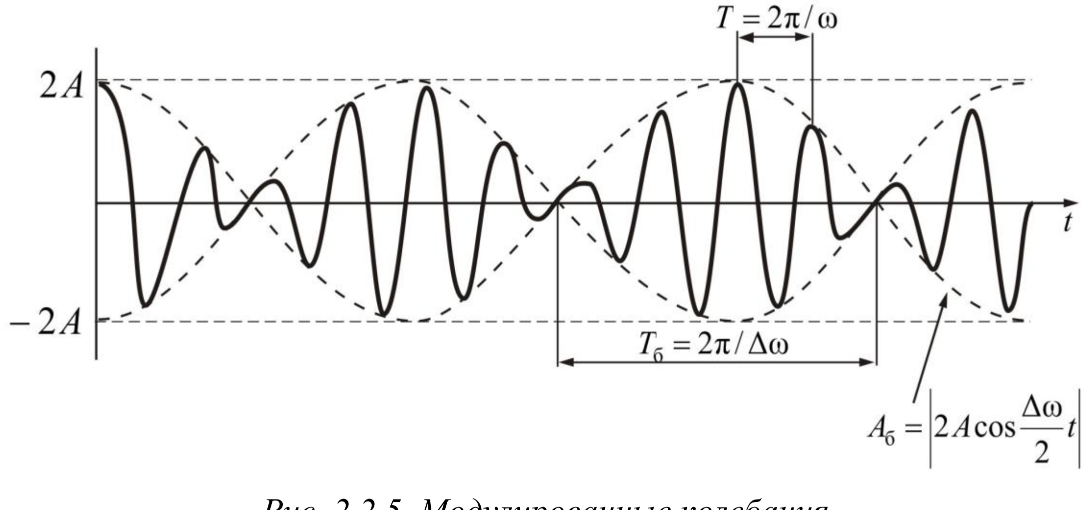


Рис. 2.2.5. Модулированные колебания

Вообще колебания вида $x = A(t)\cos\left[\omega_0 t + \varphi(t)\right]$ называются ***модулированными***. Частные случаи: *амплитудная модуляция и модулирование по фазе или частоте.* ***Биение*** *– простейший вид модулированных колебаний.*

2.2.3. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Пусть некоторое тело колеблется и вдоль оси *x*, и вдоль оси *y*, т. е. участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях:

$$\begin{aligned} x &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1); \\ y &= A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Найдем уравнение результирующего колебания. Для простоты примем $\omega_1 = \omega_2 = \omega$.

Разность фаз между обоими колебаниями равна $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

Чтобы получить уравнение траектории, надо исключить из этих уравнений время *t*. Упростим выражения, выбрав начало отсчета так, чтобы $\varphi_1 = 0$, т. е.

$$x = A_1 \cos\omega t; \; y = A_2 \cos(\omega t + \Delta\varphi).$$

В результате решения этих уравнений получим уравнение эллипса, оси которого ориентированы относительно *x* и *y* произвольно:

$$\frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1). \tag{2.2.9}$$

2.2.4. Фигуры Лиссажу (частные случаи)

Рассмотрим некоторые частные случаи решений уравнения (2.2.9).

1. ***Начальные фазы колебаний одинаковы***:

$$\varphi_1 = \varphi_2, \text{ т. е. } \varphi_2 - \varphi_1 = 0,$$

тогда уравнение (2.2.9) примет вид:

$$y = x A_2 / A_1.$$

Это уравнение прямой, проходящей через начало координат (рис. 2.2.6, *а*). Следовательно, в результате сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний с одинаковыми начальными фазами будут происходить колебания вдоль прямой, проходящей через начало координат. Такие колебания называются *линейно поляризованными.*

2. ***Начальная разность фаз равна π***, тогда $\cos\pi = -1$, следовательно, уравнение колебания в этом случае:

$$y = -x A_2 / A_1, \tag{2.2.10}$$

т. е. точка тоже будет колебаться вдоль прямой, проходящей через начало координат, но прямая лежит в других четвертях по сравнению с первым случаем (рис. 2.2.6, *б*).

Амплитуда результирующего колебания в обоих случаях равна

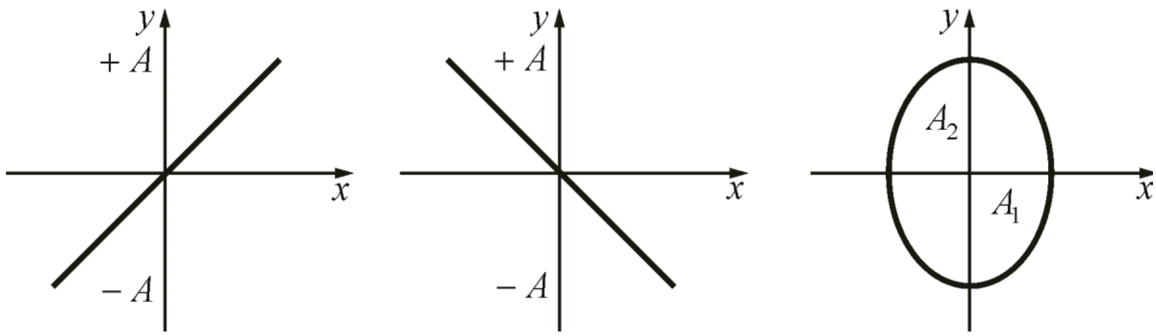
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}. \tag{2.2.11}$$

3. ***Начальная разность фаз равна π/2***, $\sin(\pi/2) = 1$; $\cos(\pi/2) = 0$. Тогда уравнение (2.2.9) примет вид:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1. \tag{2.2.12}$$

Это уравнение эллипса с полуосями A_1 и A_2 (рис. 2.2.6, *в*, табл. 1). Случай ***эллиптически поляризованных колебаний***.

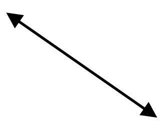
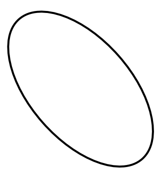
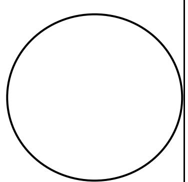
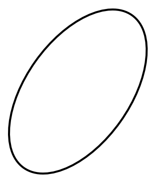
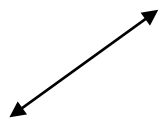
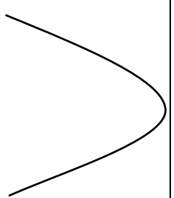
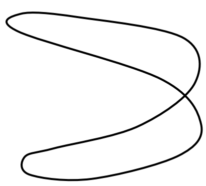
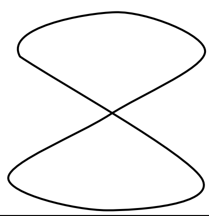
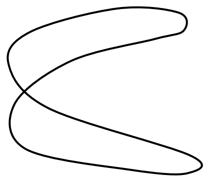
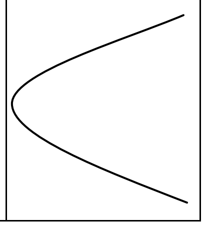
При $A_1 = A_2$ получим уравнение окружности (***циркулярно-поляризованные*** колебания).



а *б* *в*

Рис. 2.2.6. Линейно (а, б) и эллиптически (в) поляризованные колебания

Таблица 1

$\frac{\omega_1}{\omega_2}$	Угол сдвига фаз $\Delta\varphi$				
	0°	45°	90°	135°	180°
1:1					
1:2					

4. ***Все остальные разности фаз дают эллипсы*** *с различным углом наклона относительно осей координат.*

Фигуры, получаемые при сложении взаимно перпендикулярных колебаний разных частот, называются ***фигурами Лиссажу*** [Ж. Лиссажу (1822–1880) – французский физик]. В простейших случаях можно сравнить частоты по виду фигур.

В приведенных выше примерах рассматривались простейшие случаи, когда $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Если $\omega_1 \neq \omega_2$, то в результате будут получаться уже не эллипсы, а более сложные фигуры Лиссажу. В табл. 1 приведены несколько фигур Лиссажу для разных соотношений частот колебаний и заданной разности фаз $\Delta\varphi$.

Контрольные вопросы. Упражнения

1. Опишите, какие вы знаете способы представления гармонических колебаний?
2. Что такое метод векторных диаграмм?
3. Что такое вращающийся вектор амплитуд?
4. Чем отличаются одинаково направленные колебания от перпендикулярно направленых?
5. Как найти результирующую амплитуду при одинаково направленных колебаниях?
6. Опишите простые случаи сложения одинаково направленных колебаний.
7. Являются ли биения гармоническими колебаниями?
8. Что представляет амплитуда результирующих колебаний при биениях?
9. Что такое биение? Чему равна частота биений? Период?
10. Что такое модулированные колебания?
11. Опишите сложение перпендикулярно направленных колебаний.
12. Какова траектория точки, участвующей одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях с одинаковыми периодами? Как получается окружность? Прямая?
13. Что такое фигура Лиссажу?
14. Как по виду фигур Лиссажу можно определить отношение частот складываемых колебаний?
15. Как изменяется частота собственных колебаний с увеличением массы колеблющегося тела?

2.3. Влияние внешних сил на колебательные процессы

Все реальные колебания являются затухающими. Энергия механических колебаний постепенно расходуется на работу против сил трения, и амплитуда колебаний постепенно уменьшается (затухает).

2.3.1. Свободные затухающие механические колебания

Свободными затухающими колебаниями называются колебания, механическая энергия которых расходуется на работу против диссипативных сил (сил трения).

Во многих случаях в первом приближении можно считать, что при небольших скоростях силы, вызывающие затухание колебаний, пропорциональны величине скорости (например, маятник). Тогда *сила трения* (или *сопротивления*)

$$\vec{F}_{тр} = -r\vec{\upsilon},$$

где r – коэффициент сопротивления; $\vec{\upsilon}$ – скорость движения.

Запишем второй закон Ньютона для затухающих *прямолинейных* колебаний вдоль оси x:

$$ma_x = -kx - r\upsilon_x,$$

где kx – возвращающая сила; $r\upsilon_x$ – сила трения. Это уравнение можно переписать:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt},$$

отсюда следует, что $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0.$

Введем обозначения: $\frac{r}{2m} = \beta$; $\frac{k}{m} = \omega_0^2$.

Тогда однородное ***дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее затухающее колебательное движение***, запишем так:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \qquad (2.3.1)$$

Решение уравнения (2.3.1) имеет вид (при $\beta \le \omega_0$):

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi). \qquad (2.3.2)$$

Здесь A_0 и φ определяются из краевых условий задачи (начальных и граничных), а β и ω – из самого уравнения.

Круговая частота ω здесь уже не равна ω_0 $(\omega \neq \omega_0)$:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2},$$

где ω_0 – *круговая частота собственных колебаний* (без затухания); ω – *круговая частота свободных затухающих колебаний*. Из этого выражения ясно, почему решение (2.3.1) будет только при $\beta \leq \omega_0$. Для колебаний под действием различных сил (квазиупругих) значения ω, β, ω_0 будут различными. Например, для колебаний под действием упругой силы

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \ \beta = \frac{r}{2m}; \ \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}.$$

Затухающие колебания представляют собой непериодические колебания, т. к. в них не повторяется, например, максимальное значение амплитуды. Поэтому называть ω – *циклической* (повторяющейся, круговой) частотой можно лишь *условно*. По этой же причине и период называется условным периодом;

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

называется *условным периодом* затухающих колебаний.

2.3.2. Коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания

Найдем отношение значений амплитуды затухающих колебаний в моменты времени t и $t + T$ (рис. 2.3.1):

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \frac{e^{-\beta t}}{e^{-\beta t} e^{-\beta T}} = e^{\beta T}.$$

Натуральный логарифм отношения амплитуд, следующих друг за другом через период T, называется ***логарифмическим декрементом затухания*** χ:

$$\chi = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T; \ \chi = \beta T.$$

Время релаксации τ *– время, в течение которого амплитуда A уменьшается в e раз*:

$$\frac{A_0}{A_\tau} = e^{\beta\tau} = e^1,$$

отсюда $\beta\tau = 1$; $\beta = \frac{1}{\tau}$.

Коэффициент затухания β *есть физическая величина, обратная времени, в течение которого амплитуда уменьшается в e раз.*

Пусть N – число колебаний, после которых амплитуда уменьшается в e раз. Тогда

$$\tau = NT;\ T = \frac{\tau}{N};\ \beta = \frac{1}{\tau};\ \chi = \beta T = \frac{\tau}{\tau N} = \frac{1}{N}.$$

Следовательно, ***логарифмический декремент затухания*** χ *есть физическая величина, обратная числу колебаний, по истечении которых амплитуда A уменьшается в e раз.* Если $\chi = 0{,}01$, то $N = 100$.

При большом коэффициенте затухания происходит не только быстрое уменьшение амплитуды, но и заметно увеличивается период колебаний. Когда сопротивление становится равным ***критическому*** ($r = r_{кр}$, а $\beta = \omega_0$), то круговая частота обращается в нуль ($\omega = 0$, а период $T \to \infty$), колебания прекращаются. Такой процесс называется ***апериодическим*** (рис. 2.3.2).

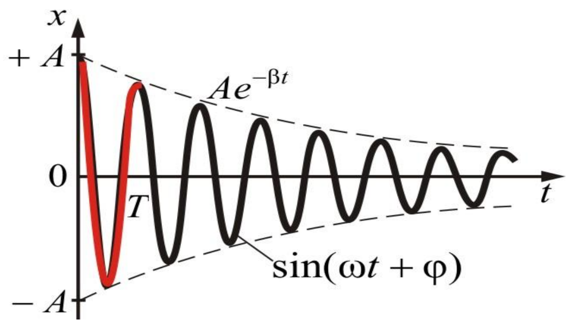


Рис. 2.3.1. Затухающие колебания

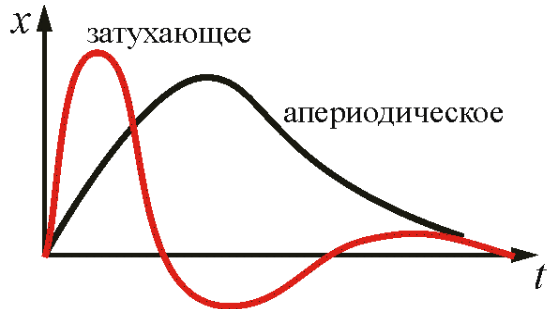


Рис. 2.3.2. Апериодический процесс

Отличия в следующем. При колебаниях тело, возвращающееся в положение равновесия, *имеет запас кинетической энергии*. В случае *апериодического движения* энергия тела при возвращении в положение равновесия оказывается израсходованной на преодоление сил сопротивления, трения (например, маятник, опущенный в воду или дверной доводчик).

2.3.3. Вынужденные механические колебания

Рассмотрим систему, на которую, кроме упругой силы ($-kx$) и сил сопротивления ($-r\upsilon$), действует добавочная *периодическая сила F* – ***вынуждающая сила***. Для колебаний вдоль оси x запишем:

$$ma_x = -kx - r\upsilon_x + F_x$$

– ***основное уравнение колебательного процесса***, или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_x, \qquad (2.3.3)$$

где $f_x = F_x/m$ – вынуждающая сила, изменяющаяся по закону,

$$f_x = F_0\cos\omega t.$$

Через некоторое время после начала действия вынуждающей силы колебания системы будут совершаться с частотой вынуждающей силы ω. Уравнение установившихся вынужденных колебаний

$$x = A\sin(\omega t + \varphi). \tag{2.3.4}$$

Амплитуда вынужденных колебаний

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \tag{2.3.5}$$

Таким образом, $A \sim F_0 / m$ и $\sim 1/\beta$.

При постоянных F_0, m и β амплитуда зависит только от соотношения круговых частот вынуждающей силы ω и свободных незатухающих колебаний системы ω_0.

Начальную фазу вынужденных колебаний можно найти из выражения:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{A_3 - A_1}{A_2} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\beta\omega}. \tag{2.3.6}$$

Проанализируем выражение (2.3.5):

1) $\omega = 0$ (частота вынуждающей силы равна нулю), тогда

$$A = F_0 / m\omega_0$$

– *статическая амплитуда* (колебания не совершаются);

2) $\beta = 0$ (затухания нет). С увеличением ω (но при $\omega < \omega_0$) амплитуда растет и при $\omega = \omega_0$ резко возрастает ($A \to \infty$). Это явление называется ***резонанс***. При дальнейшем увеличении ω ($\omega > \omega_0$) амплитуда опять уменьшается (рис. 2.3.3);

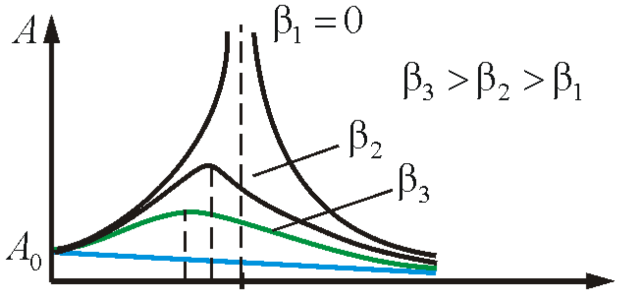


Рис. 2.3.3. Резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний – резонанс

3) $\beta \neq 0$. Амплитуда будет максимальна при минимальном значении знаменателя. Для нахождения точки перегиба возьмем первую про-

изводную по ω от подкоренного выражения (3.3.3) и, приравняв ее к нулю, получим

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \tag{2.3.7}$$

где $\omega_{\text{рез}}$ – *резонансная частота*.

Явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к $\omega_{\text{рез}}$ *называется* ***резонансом***.

Для *консервативной* системы, т. е. $\beta = 0$, из (2.3.7) следует $\omega_{\text{рез}} = \omega_0$; для *диссипативной* $\omega_{\text{рез}}$ несколько меньше собственной круговой частоты ω_0 (рис. 2.3.3).

С увеличением коэффициента затухания β явление резонанса проявляется все слабее и исчезает при $\beta > \dfrac{\omega_0}{\sqrt{2}}$.

Контрольные вопросы. Упражнения

1. Запишите дифференциальное уравнение затухающих колебаний и его решение. Проанализируйте их для механических колебаний.
2. По какому закону изменятся амплитуда затухающих колебаний? Являются ли затухающие колебания периодическими?
3. Почему частота затухающих колебаний должна быть меньше частоты собственных колебаний системы?
4. Что такое коэффициент затухания? Декремент затухания? Логарифмический декремент затухания? В чем заключается физический смысл этих величин?
5. При каких условиях наблюдается апериодическое движение?
6. Что такое автоколебания? В чем их отличие от свободных незатухающих и вынужденных незатухающих колебаний? Где они применяются?
7. Что такое вынужденные колебания? Запишите дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и решите его.
8. От чего зависит амплитуда вынужденных колебаний? Запишите выражение для амплитуды и фазы при резонансе.
9. Нарисуйте и проанализируйте резонансные кривые для амплитуды смещения и скорости. В чем их аналогия?
10. Почему добротность является важнейшей характеристикой резонансных свойств системы?
11. Чему равен сдвиг фаз между смещением и вынуждающей силой при резонансе?
12. Что называется резонансом? Какова его роль?

2.4. Упругие волны

2.4.1. Распространение волн в упругой среде

Колебания, возбужденные в какой-либо точке среды (твердой, жидкой или газообразной), распространяются в ней с конечной скоростью, зависящей от свойств среды, передаваясь от одной точки среды к другой. Чем дальше расположена частица среды от источника колебаний, тем позднее она начнет колебаться. Иначе говоря, увлекаемые частицы будут отставать по фазе от тех частиц, которые их увлекают.

При изучении распространения колебаний не учитывается дискретное (молекулярное) строение среды. Среда рассматривается как сплошная, т. е. непрерывно распределенная в пространстве и обладающая упругими свойствами.

Итак, колеблющееся тело, помещенное в упругую среду, является источником колебаний, распространяющихся от него во все стороны. ***Процесс распространения колебаний в среде называется волной.***

При распространении волны частицы среды не движутся вместе с волной, а колеблются около своих положений равновесия. Вместе с волной от частицы к частице передается лишь состояние колебательного движения и энергия. Поэтому *основным свойством всех волн, независимо от их природы, является перенос энергии без переноса вещества.*

Волны бывают ***поперечными*** (колебания происходят в плоскости, перпендикулярной направлению распространения) и ***продольными*** (сгущение и разрежение частиц среды происходит в направлении распространения).

Граница, отделяющая колеблющиеся частицы от частиц еще не начавших колебаться, называется фронтом волны.

В однородной среде направление распространения перпендикулярно фронту волны (рис. 2.4.1, 2.4.2).

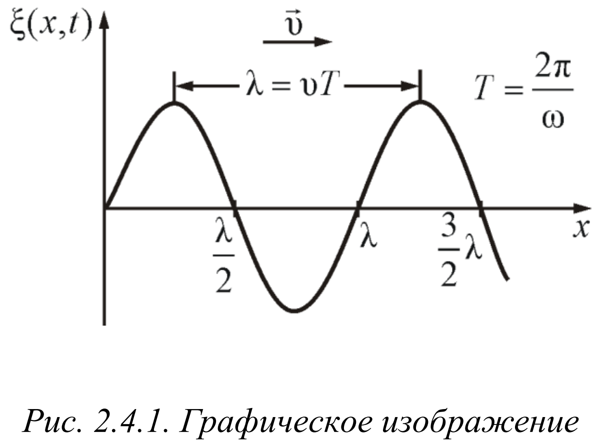


Рис. 2.4.1. Графическое изображение распространяющейся волны

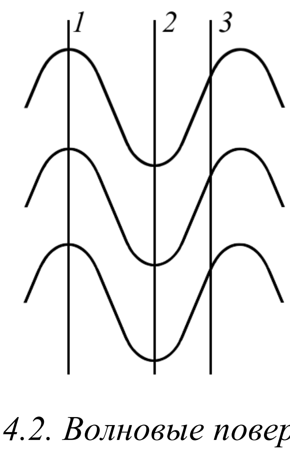


Рис. 2.4.2. Волновые поверхности и волновой фронт

Расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе, называется *длиной волны* λ (рис. 2.4.1):

$$\lambda = \upsilon T, \tag{2.4.1}$$

где υ – скорость распространения волны; $T = 1/\nu$ – период; ν – частота. Отсюда скорость распространения волны можно найти по формуле

$$\upsilon = \lambda\nu. \tag{2.4.2}$$

Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется ***волновой поверхностью*** (рис. 2.4.2). Волновую поверхность можно провести через любую точку пространства, охваченную волновым процессом, т. е. волновых поверхностей бесконечное множество. Волновые поверхности остаются неподвижными (они проходят через положение равновесия частиц, колеблющихся в одинаковой фазе). Волновой фронт (рис. 2.4.2) только один, и он все время перемещается.

Волновые поверхности могут быть любой формы. В простейших случаях волновые поверхности имеют форму плоскости или сферы, соответственно, волны называются ***плоскими*** (рис. 2.4.3) или ***сферическими*** (рис. 2.4.4). В плоской волне волновые поверхности представляют собой систему параллельных друг другу плоскостей, в сферической волне – систему концентрических сфер.

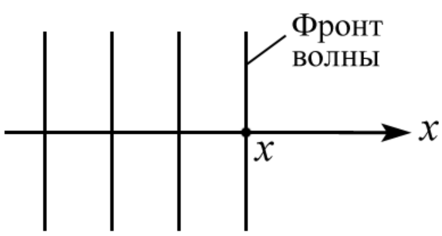


Рис. 2.4.3. Плоские волны

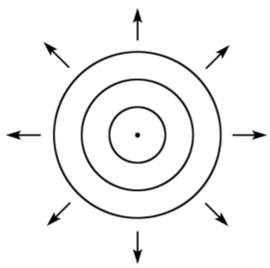


Рис. 2.4.4. Сферические волны

2.4.2. Уравнения плоской и сферической волн

Уравнением волны называется выражение, которое дает ***смещение*** колеблющейся точки как функцию ее координат (x, y, z) и времени t:

$$\xi = f(x, y, z, t) = \xi(x, y, z, t). \tag{2.4.3}$$

Эта функция должна быть периодической как относительно времени, так и координат (волна – это распространяющееся колебание, следовательно, периодически повторяющееся движение). Кроме того, точки, отстоящие друг от друга на расстоянии λ, колеблются одинаковым образом.

Уравнение плоской волны

Найдем вид функции ξ в случае плоской волны, предполагая, что колебания носят гармонический характер.

Пусть колебание точек, лежащих в плоскости $x = 0$, имеет вид (при начальной фазе $\varphi = 0$):

$$\xi = \xi(0, t) = A\cos\omega t. \tag{2.4.4}$$

Найдем вид колебания частиц в плоскости, соответствующей произвольному значению x. Чтобы пройти путь x, необходимо время $\tau = x/\upsilon$. *Следовательно,* колебания частиц в плоскости x будут отставать по времени на τ от колебаний частиц в плоскости $x = 0$, т. е.

$$\xi(x, t) = A\cos\omega(t - \tau) = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) \tag{2.4.5}$$

– это ***уравнение плоской волны*** (рис. 2.4.3).

Таким образом, ξ есть ***смещение*** любой из точек с координатой x в момент времени t. При выводе мы предполагали, что амплитуда колебания $A = \text{const}$. Это будет, если энергия волны не поглощается средой.

Такой же вид уравнение (2.4.5) будет иметь, если колебания распространяются вдоль оси y или z.

В общем виде уравнение плоской волны *записывается так*:

$$\xi = A\cos\omega\left(t - \frac{r}{\upsilon}\right), \text{ или } \xi = A\cos\omega\left[\left(t - \frac{r}{\upsilon}\right) + \varphi\right]. \tag{2.4.6}$$

Выражения (2.4.5) и (2.4.6) есть ***уравнения бегущей волны***.

Уравнение волны можно записать и в другом виде.

Введем ***волновое число*** $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, или в векторной форме

$$\vec{\mathrm{k}} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{\mathrm{n}},$$

где $\vec{\mathrm{k}}$ – ***волновой вектор***; $\vec{\mathrm{n}}$ – нормаль к волновой поверхности.

Так как $\lambda = \upsilon T$, то $k = \dfrac{2\pi}{\upsilon T} = \dfrac{2\pi\nu}{\upsilon} = \dfrac{\omega}{\upsilon}$. Отсюда $\upsilon = \dfrac{\omega}{k}$. Тогда ***уравнение плоской волны*** запишется так:

$$\xi = A\cos(\omega t - kx). \tag{2.4.7}$$

Уравнение сферической волны

В случае когда скорость волны υ во всех направлениях постоянна, а источник точечный, волна будет ***сферической*** (рис. 2.4.4). Предположим, что фаза колебаний источника равна ωt (т. е. $\varphi_0 = 0$). Тогда точки, лежащие на волновой поверхности радиуса r, будут иметь фазу $\omega\left(t - \frac{r}{\upsilon}\right)$. Амплитуда колебаний здесь, даже если волна не поглощается средой, не будет постоянной, она убывает по закону $\frac{1}{r}$. Следовательно, ***уравнение сферической волны*** –

$$\xi = \frac{A}{r}\cos\omega\left(t - \frac{r}{\upsilon}\right), \quad \text{или} \quad \xi = \frac{A}{r}\cos(\omega t - kr), \tag{2.4.8}$$

где A равна амплитуде на расстоянии от источника, равном единице.

Уравнение (2.4.8) неприменимо для малых r, т. к. при $r \to 0$ амплитуда стремится к бесконечности. То, что амплитуда колебаний $A \sim \frac{1}{r}$, следует из рассмотрения энергии, переносимой волной.

2.4.3. Фазовая скорость. Принцип суперпозиции. Групповая скорость

Фазовая скорость – это скорость распространения фазы волны.

Зафиксируем какое-либо значение фазы волны и проследим, с какой скоростью фаза будет перемещаться вдоль оси x:

$$\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) = \text{const}.$$

Это уравнение дает связь между t и тем значением x, где зафиксированное значение фазы будет в данный момент времени. Следовательно, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ – это есть ***скорость перемещения данной фазы***, т. к. $\omega = \text{const}$, поэтому $t - \frac{x}{\upsilon} = \text{const}$. Возьмем производную по времени от обеих частей равенства: $1 - \frac{1}{\upsilon}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$. Отсюда получим выражение для ***фазовой скорости***

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \upsilon. \tag{2.4.9}$$

Итак, скорость распространения фазы есть скорость распространения волны, т. е. υ в уравнении волны есть ***фазовая скорость***. Для синусоидальной волны скорость переноса энергии равна фазовой скорости. Но синусоидальная волна не несет никакой информации, любой сигнал – это модулированная волна, т. е. несинусоидальная (негармоническая).

При решении некоторых задач получается, что фазовая скорость больше скорости света. Здесь нет парадокса, т. к. ***скорость перемещения фазы*** – это не скорость передачи (распространения) энергии, которая не может распространяться со скоростью большей, чем скорость света c.

Принцип суперпозиции. Групповая скорость

Если свойства среды не изменяются под действием возмущений, создаваемых волной, то к ним применим ***принцип суперпозиции*** (***наложения волн***): при распространении в такой среде нескольких волн каждая из них распространяется так, как будто другие волны отсутствуют, а результирующее смещение частицы среды равно геометрической сумме смещений частиц.

Строго монохроматическая волна представляет собой бесконечную во времени и пространстве последовательность «горбов» и «впадин»:

$$\xi = \xi_0 \cos(\omega t - kx + \alpha). \qquad (2.4.10)$$

Фазовая скорость этой волны $\upsilon = \omega / k$, или $\upsilon = \lambda \nu$.

С помощью такой волны нельзя передавать сигнал, т. к. в любой точке волны все «горбы» одинаковы. Сигнал должен отличаться, быть знаком (меткой) на волне. Но тогда волна уже не будет описываться уравнением (2.4.10).

Сигнал (импульс) можно представить (согласно теореме Фурье) в виде суперпозиции гармонических волн с частотами, заключенными в некотором интервале $\Delta\omega$. Суперпозиция волн, мало отличающихся друг от друга по частоте, называется ***волновым пакетом*** или ***группой волн*** (рис. 2.4.5).

Выражение для группы волн:

$$\xi(x,t) = \int_{\omega - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega + \frac{\Delta\omega}{2}} E_{0\omega} \cos(\omega t - k_\omega x + \alpha_\omega) \mathrm{d}\omega. \qquad (2.4.11)$$

Этот волновой пакет может быть суммой двух волн с мало отличающимися частотами (рис. 2.4.6).

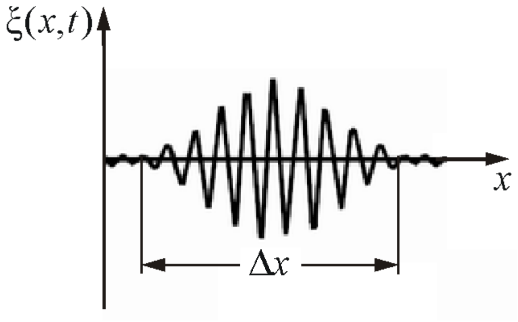


Рис. 2.4.5. Волновой пакет или группа волн

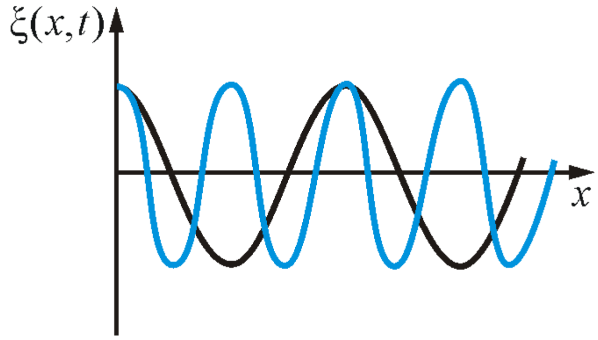


Рис. 2.4.6. Группа волн, с мало отличающимися частотами

Там, где фазы совпадают, наблюдается усиление амплитуды, где нет – гашение (результат интерференции).

Чтобы суперпозицию можно было считать группой волн, необходимо условие $\Delta\omega << \omega_0$.

Дисперсия – это зависимость фазовой скорости в среде от частоты.

Скорость, с которой перемещается центр пакета (точка с максимальным значением A), *называется **групповой скоростью** u*.

В диспергирующей среде $u \neq \upsilon$. Вместе с движением самого пакета происходит движение «горбов» внутри пакета. «Горбы» перемещаются со скоростью υ, а пакет в целом – со скоростью u,

$$u = \upsilon - \lambda \frac{d\upsilon}{d\lambda}. \qquad (2.4.12)$$

Из этой формулы следует, что **в *диспергирующей среде***, в зависимости от знака $\frac{d\upsilon}{d\lambda}$, групповая скорость может быть больше или меньше фазовой.

В отсутствие дисперсии $\frac{d\upsilon}{d\lambda} = 0$ и $u = \upsilon$. Максимум интенсивности приходится на центр группы волн. Поэтому *скорость переноса энергии равна групповой скорости.*

Понятие групповой скорости применимо только при условии, что *поглощение энергии волны* в среде *невелико*. При значительном затухании волн понятие групповой скорости утрачивает смысл. Это случай из области аномальной дисперсии (рассмотрим позже).

2.4.4. Интерференция волн. Стоячие волны

Если в среде распространяется несколько волн, то колебания частиц среды оказываются геометрической суммой колебаний, которые совершали бы частицы при распространении каждой из волн в отдельности. ***Волны накладываются*** *друг на друга, не возмущая* (*не искажая друг друга*). *Это и есть* ***принцип суперпозиции волн***.

Если две волны, приходящие в какую-либо точку пространства, обладают постоянной разностью фаз, такие волны называются ***когерентными***. *При сложении когерентных волн возникает* ***явление интерференции***.

Очень важный случай интерференции наблюдается при наложении двух встречных плоских волн с одинаковой амплитудой. Возникающий в результате колебательный процесс называется ***стоячей волной***. Практически стоячие волны возникают при отражении от преград.

Напишем уравнения двух плоских волн, распространяющихся в противоположных направлениях (начальная фаза $\varphi = 0$):

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= A\cos(\omega t - kx); \\ \xi_2 &= A\cos(\omega t + kx). \end{aligned}\right\}$$

Сложим эти уравнения, преобразуем их по формуле суммы косинусов и, учитывая, что $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, получим ***уравнение стоячей волны***

$$\xi = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cos\omega t. \qquad (2.4.13)$$

Обозначив $A^* = 2A\cos\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}x\right)$, выражение (2.4.13) можно записать как

$$\xi = A^*\cos\omega t.$$

В точках, где координаты удовлетворяют условию $2\pi\dfrac{x}{\lambda} = \pm n\pi$ (n = 1, 2, 3, …), $\cos\left(2\pi\dfrac{x}{\lambda}\right) = 1$, суммарная амплитуда равна максимальному значению: $A^* = 2A$ – *это* ***пучности*** *стоячей волны*.

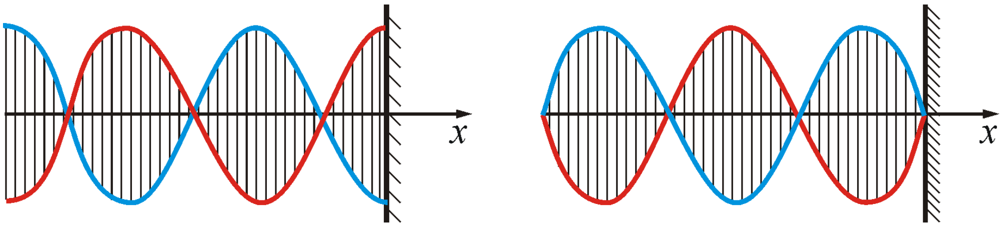
Координаты пучностей: $x_{\text{пучн}} = \pm n\lambda/2$.

В точках, координаты которых удовлетворяют условию $2\pi\dfrac{x}{\lambda} = \pm(n + \dfrac{1}{2})\pi$ (n = 0, 1, 2,…), $\cos\left(\dfrac{2\pi x}{\lambda}\right) = 0$ и суммарная амплитуда колебаний равна нулю; $A^* = 0$ – *это* ***узлы*** *стоячей волны*.

Координаты узлов: $x_{\text{узл}} = \pm\left(n + \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\lambda}{2}.$

Точки среды, находящиеся в узлах, колебаний не совершают.

Образование стоячих волн наблюдают при интерференции бегущей и отраженных волн. На границе, где происходит отражение волны, получается пучность, если среда, от которой происходит отражение, менее плотная (рис. 2.4.7, *а*), и узел, – если более плотная (рис. 2.4.7, *б*).



а *б*

Рис. 2.4.7. Стоячая волна

Если рассматривать ***бегущую волну***, то в направлении ее распространения *переносится энергия* колебательного движения. ***В случае*** же ***стоячей волны переноса энергии нет***, т. к. падающая и отраженная волны одинаковой амплитуды несут одинаковую энергию в противоположных направлениях.

2.4.5. Волновое уравнение

Уравнение любой волны есть решение некоторого дифференциального уравнения, называемого ***волновым***. Найдем ***общий вид волнового уравнения***. Для этого продифференцируем дважды уравнение плоской волны $\xi = A\cos(\omega t - kr)$ по времени t и всем координатам. Учтем при этом, что $\upsilon = \omega / k$. Окончательно получим для ***волнового уравнения:***

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}. \qquad (2.4.14)$$

Всякая функция, удовлетворяющая уравнению (2.4.14), описывает некоторую волну, причем корень квадратный из величины, обратной коэффициенту при производной по времени $1/\upsilon^2$, есть *фазовая скорость волны:*

Используя оператор Лапласа $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$, ***волновое уравнение*** можно записать в виде:

$$\nabla^2\xi = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}. \qquad (2.4.15)$$

2.4.6. Эффект Доплера

Известно, что при приближении к неподвижному наблюдателю быстро движущегося электропоезда его звуковой сигнал кажется более высоким, а при удалении от наблюдателя – более низким, чем сигнал того же электропоезда, но неподвижного.

Эффектом Доплера называют изменение частоты волн, регистрируемых приемником, которое происходит вследствие движения источника этих волн и приемника.

Источник, двигаясь к приемнику, как бы сжимает пружину – волну (рис. 2.4.8).

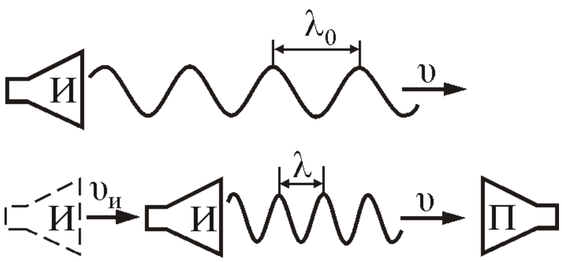


Рис. 2.4.8. Эффект Доплера – изменение частоты волны, регистрируемой приемником от движущегося источника

Данный эффект наблюдается при распространении звуковых волн (акустический эффект) и электромагнитных волн (оптический эффект).

Рассмотрим несколько случаев проявления ***акустического эффекта Доплера***.

Пусть приемник звуковых волн П в газообразной (или жидкой) среде неподвижен относительно нее, а источник И удаляется от приемника со скоростью $\vec{\upsilon}_и$ вдоль соединяющей их прямой (рис. 2.4.9, *а*).

Источник смещается в среде за время, равное периоду T_0 его колебаний, на расстояние $\upsilon_и T_0 = \dfrac{\upsilon_и}{\nu_0}$, где ν_0 – частота колебаний источника.

Поэтому при движении источника длина волны в среде λ отлична от ее значения λ_0 при неподвижном источнике:

$$\lambda = \lambda_0 + \upsilon_и T_0 = (\upsilon + \upsilon_и)T_0 = \frac{(\upsilon + \upsilon_и)}{\nu_0},$$

где υ – фазовая скорость волны в среде.

Частота волны, регистрируемая приемником, $\nu = \dfrac{\upsilon}{\lambda} = \dfrac{\nu_0}{1 + \upsilon_и / \upsilon}$.

Если вектор $\vec{\upsilon}_и$ скорости источника направлен под произвольным углом θ_1 к радиус-вектору $\vec{R}$, соединяющему неподвижный приемник с источником (рис. 2.4.9, *б*), то

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 + (\upsilon_и / \upsilon)\cos\theta_1}.$$

Если источник неподвижен, а приемник приближается к нему со скоростью $\vec{\upsilon}_п$ вдоль соединяющей их прямой (рис. 2.4.9, *в*), то длина волны в среде $\lambda = \lambda_0 = \dfrac{\upsilon}{\nu_0}$. Однако скорость распространения волны относительно приемника равна $\upsilon + \upsilon_п$, так что частота волны, регистрируемая приемником,

$$\nu = (\upsilon + \upsilon_п)/\lambda_0 = \nu_0(1 + \upsilon_п / \upsilon).$$

В том случае, когда скорость $\vec{\upsilon}_ï$ направлена под произвольным углом θ_2 к радиус-вектору $\vec{R}$, соединяющему движущийся приемник с неподвижным источником (рис. 2.4.9, *г*), имеем:

$$\nu = \nu_0\left[1 + \upsilon_п / \upsilon\right]\cos\theta_2.$$

В самом общем случае, когда и приемник, и источник звуковых волн движутся относительно среды с произвольными скоростями (рис. 2.4.9, *д*),

$$\nu = \nu_0 \frac{1 + (\upsilon_п / \upsilon)\cos\theta_2}{1 + (\upsilon_и / \upsilon)\cos\theta_1}.$$

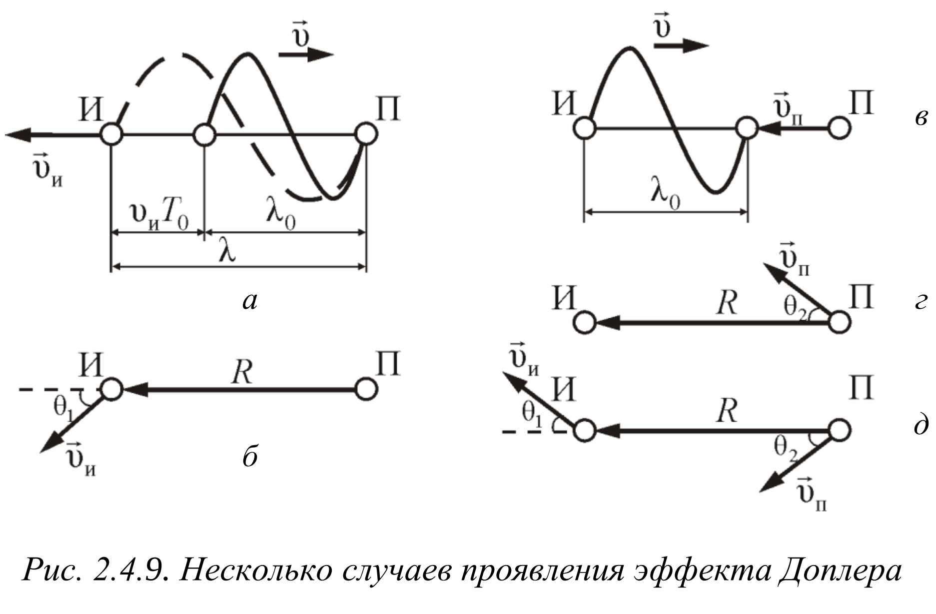


Рис. 2.4.9. Несколько случаев проявления эффекта Доплера

Оптический эффект Доплера

При движении источника и приемника электромагнитных волн относительно друг друга также наблюдается ***эффект Доплера,*** т. е. *изменение частоты волны*, регистрируемой приемником. В отличие от рассмотренного нами эффекта Доплера в акустике, закономерности этого явления для электромагнитных волн можно установить только на основе специальной теории относительности.

Соотношение, описывающее *эффект Доплера* для *электромагнитных волн* в вакууме, с учетом преобразований Лоренца, имеет вид:

$$\nu = \frac{\nu_0\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{1+(\upsilon/c)\cos\theta}. \tag{2.4.16}$$

При небольших скоростях движения источника волн относительно приемника, релятивистская формула эффекта Доплера совпадает с классической формулой.

Если источник движется относительно приемника вдоль соединяющей их прямой, то наблюдается ***продольный эффект Доплера***.

В случае сближения источника и приемника $(\theta = \pi)$

$$\nu = \nu_0\sqrt{\frac{1+\upsilon/c}{1-\upsilon/c}} > \nu_0, \tag{2.4.17}$$

а в случае их взаимного удаления $(\theta = 0)$

$$\nu = \nu_0\sqrt{\frac{1-\upsilon/c}{1+\upsilon/c}} < \nu_0. \tag{2.4.18}$$

Кроме того, из релятивистской теории эффекта Доплера следует существование ***поперечного эффекта Доплера***, наблюдающегося при $\theta = \pi/2$ и $\theta = 3\pi/2$, т. е. в тех случаях, когда источник движется перпендикулярно линии наблюдения (например источник движется по окружности, приемник в центре):

$$\nu = \nu_0\sqrt{1-\upsilon^2/c^2} < \nu_0. \tag{2.4.19}$$

Поперечный эффект Доплера необъясним в классической физике. Он представляет чисто релятивистский эффект.

Как видно из формулы (2.4.19), поперечный эффект пропорционален отношению υ^2/c^2, следовательно он значительно слабее продольного, который пропорционален υ/c (2.4.18).

Эффект Доплера нашел широкое применение в науке и технике. Особенно большую роль это явление играет в астрофизике. На основании доплеровского смещения линий поглощения в спектрах звезд и туманностей можно определять лучевые скорости $\upsilon'\cos\theta$ этих объектов по отношению к Земле: при $\upsilon << c$ по формуле

$$\upsilon'\cos\theta \approx (1 - \nu / \nu_0)c. \qquad (2.4.20)$$

Американский астроном Э. Хаббл обнаружил в 1929 г. явление, получившее название ***космологического красного смещения*** и состоящее в том, что линии в спектрах излучения внегалактических объектов смещены в сторону меньших частот (больших длин волн). Оказалось, что для каждого объекта относительное смещение частоты $z = (\nu_0 - \nu)/\nu_0$ (ν_0 – частота линии в спектре неподвижного источника, ν – наблюдаемая частота) совершенно одинаково по всем частотам. Космологическое красное смещение есть не что иное, как эффект Доплера. Оно свидетельствует о том, что Метагалактика расширяется, так что внегалактические объекты удаляются от нашей Галактики.

Под Метагалактикой понимают совокупность всех звездных систем. В современные телескопы можно наблюдать часть Метагалактики, оптический радиус которой равен $R = 1{,}12 \cdot 10^{23}$ км. Существование этого явления было теоретически предсказано еще в 1922 г. советским ученым А.А. Фридманом на основе развития общей теории относительности.

Хаббл установил закон, согласно которому ***относительное красное смещение z галактик растет пропорционально расстоянию r до них*** (рис. 2.4.10).

Закон Хаббла можно записать в виде

$$\upsilon\cos\theta \approx cz = Hr, \qquad (2.4.21)$$

где H – постоянная Хаббла. По самым современным оценкам $H = 73{,}2$ км / (с · Мпк), 1 пк (парсек) – расстояние, которое свет проходит в вакууме за 3,27 лет (1 пк $\approx 3{,}09 \cdot 10^{16}$ м).

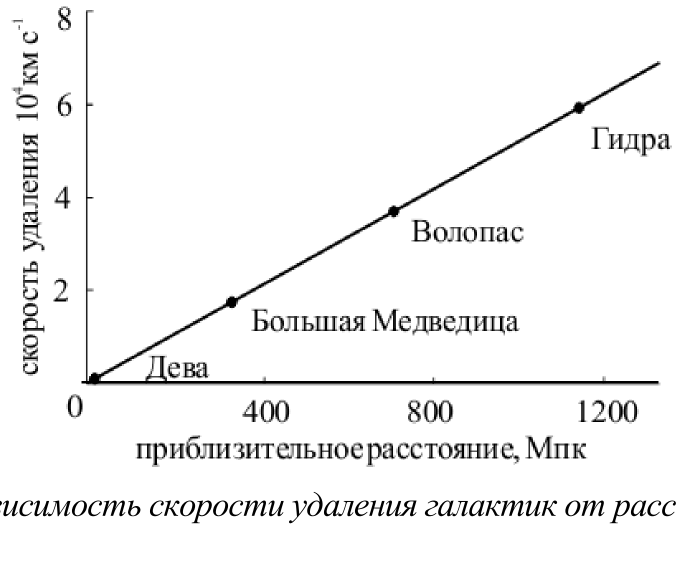


Рис. 2.4.10. Зависимость скорости удаления галактик от расстояния до них

Чем дальше находится галактика, тем больше ее красное смещение, поэтому больше скорость ее удаления.

В 1990 г. на борту шаттла «Дискавери» был выведен на орбиту космический телескоп имени Хаббла (рис. 2.4.11).

Рис. 2.4.11. Космический телескоп Хаббл

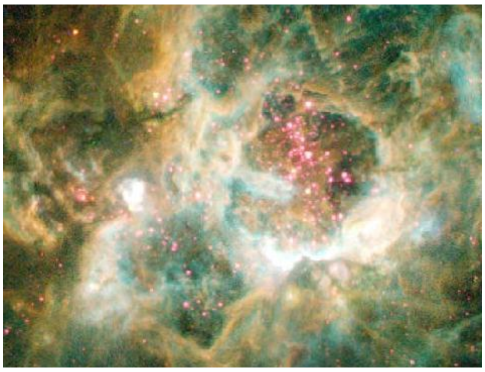


Рис. 2.4.12. Фотография Галактики

Астрономы давно мечтали о телескопе, который работал бы в видимом диапазоне, но находился за пределами земной атмосферы, сильно мешающей наблюдениям. «Хаббл» не только не обманул возлагавшихся на него надежд, но даже превзошел практически все ожидания. Он фантастически расширил «поле зрения» человечества, заглянув в немыслимые глубины Вселенной. За время своей работы космический телескоп передал на землю 700 тыс. великолепных фотографий (рис. 2.4.12). Он, в частности, помог астрономам определить точный возраст нашей Вселенной – 13,7 млрд лет; помог подтвердить существование во Вселенной странной, но оказывающей огромное влияние, формы энергии – темной энергии; доказал существование сверхмассивных черных дыр; удивительно четко заснял падение кометы на Юпитер; показал, что процесс формирования планетных систем является широко распространенным в нашей Галактике; обнаружил небольшие протогалактики, зарегистрировав излучение, испущенное ими, когда возраст Вселенной составлял менее 1 млрд лет.

На эффекте Доплера основаны радиолокационные лазерные методы измерения скоростей различных объектов на Земле (например, автомобиля, самолета и др.). Лазерная анемометрия является незаменимым методом изучения потока жидкости или газа. Хаотическое тепловое движение атомов светящегося тела также вызывает уширение линий в его спектре, которое возрастает с увеличением скорости теплового движения, т. е. с повышением температуры газа. Это явление можно использовать для определения температуры раскаленных газов.

Особенно большую роль это явление играет в астрофизике. На основании доплеровского смещения линий поглощения в спектрах звезд и туманностей можно определять лучевые скорости этих объектов по отношению к Земле.

Контрольные вопросы. Упражнения

1. Что такое волна? Как объяснить распространение колебаний в упругой среде?
2. Что называется поперечной волной? Продольной? Когда они возникают?
3. Что такое волновой фронт? Волновая поверхность?
4. Что называется длиной волны? Какова связь между длиной волны, скоростью и периодом?
5. Что такое волновое число? Фазовая и групповая скорость?
6. В чем заключается физический смысл вектора Умова?
7. Какая волна является бегущей, гармонической, плоской, сферической? Каковы уравнения этих волн?
8. При каких условиях возникают интерференция волн?
9. Всегда ли сохраняется энергия при интерференции двух волн? Ответ обосновать.
10. Когда на струне образуется стоячая волна, колебания падающей и отраженной волн в узлах взаимно гасятся. Означает ли это, что исчезает энергия?
11. Чем стоячая волна отличается от бегущей?
12. Чему равно расстояние между двумя соседними узлами стоячей волны? Двумя соседними пучностями? Соседними пучностью и узлом?
13. Что такое звуковые волны? Звуковые волны в воздухе продольные или поперечные? Почему?
14. Может ли звук распространяться в вакууме?
15. От чего зависят громкость, высота и тембр звука?
16. Что такое эффект Доплера? Чему будет равна частота колебаний, воспринимаемых покоящимся приемником, если источник колебаний от него удаляется?
17. Какое влияние оказывает скорость ветра на эффект Доплера?
18. Как определить частоту звука, воспринимаемую приемником, если источник звука и приемник движутся?
19. Две когерентные волны, распространяющиеся навстречу друг другу, отличаются только амплитудами. Образуют ли они стоячую волну?
20. Две когерентные волны с одинаковым периодом распространяются в одном направлении. Разность хода равна четному числу полуволн. Что получится в результате интерференции?

…сколько чего у одного тела отнимется, столько присовокупится к другому, так ежели где убудет несколько материи, то умножится в другом месте...

М.В. Ломоносов

3. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ТЕРМОДИНАМИКА

3.1. Молекулярно-кинетическая теория

3.1.1. Основные понятия молекулярной физики и термодинамики

Совокупность тел, составляющих ***макроскопическую*** систему, называется ***термодинамической системой***. Система может находиться в различных состояниях. *Величины, характеризующие состояние системы, называются* ***параметрами состояния****:* ***давление*** *P*, ***температура*** *T*, ***объем*** *V* и т. д. Связь между *P*, *T*, *V* специфична для каждого тела и называется ***уравнением состояния***.

Любой параметр, имеющий *определенное* значение для каждого равновесного состояния, является ***функцией состояния системы***.

Равновесной *называется такая система, параметры состояния которой одинаковы во всех точках системы и не изменяются со временем* (*при неизменных внешних условиях*).

Термодинамическое равновесие существенно отличается от механического тем, что, хотя параметры системы остаются неизменными, частицы, из которых состоит система, находятся в непрерывном движении. Параметры состояния не остаются строго постоянными, а испытывают небольшие колебания внутри своих равновесных состояний. Такие колебания называются ***флуктуациями.***

Процесс – *переход из одного равновесного состояния в другое.*

Релаксация – *возвращение системы в равновесное состояние.* Если система выведена из состояния равновесия и предоставлена самой себе, т. е. не подвержена внешним воздействиям, то в течение достаточно большого промежутка времени самопроизвольно происходит процесс перехода к равновесному состоянию (иногда это утверждение называют нулевым началом термодинамики). *Время перехода* – ***время релаксации***.

Если равновесие установилось, то система самопроизвольно не сможет выйти из него.

Атомная единица массы (а. е. м.) – единица массы, равная 1/12 массы изотопа углерода ^{12}C – m_{C}: $m_{\text{ед}} = (1/12)m_{\text{C}} = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг.

Атомная масса химического элемента (атомный вес) A есть отношение массы атома этого элемента m_A к 1/12 массы изотопа углерода C^{12}: $A = m_A / m_{\text{ед}}$ (безразмерная величина).

Молекулярная масса (молекулярный вес) $M = m_M / m_{\text{ед}}$.

Отсюда можно найти массу атома и молекулы в килограммах:

$$m_A = Am_{\text{ед}};\; m_M = Mm_{\text{ед}}.$$

Моль *– это стандартизированное количество любого вещества, находящегося в газообразном, жидком или твердом состоянии.*

1 моль *– количество грамм вещества, равное его молекулярной массе.*

Количество вещества, масса которого, выраженная в килограммах, равна его молекулярному весу, называется ***киломолем***:

$$\mu\left[\text{кг/кмоль} = \text{г/моль}\right] = M \text{ или } A\ (\text{безразмерные}).$$

В 1811 г. итальянский физик А. Авогадро высказал предположение, что *число частиц в киломоле любого вещества постоянно* и равно величине, названной впоследствии ***числом Авогадро***:

$$N_{\text{A}} = 1/m_{\text{ед}} = 6{,}022 \cdot 10^{26}\,\text{кмоль}^{-1} = 6{,}022 \cdot 10^{23}\,\text{моль}^{-1}.$$

Молярная масса – масса одного моля (μ): $\mu = Am_{\text{ед}}N_{\text{A}}$.

При одинаковых температурах и давлениях все газы содержат в единице объема одинаковое число молекул. *Число молекул идеального газа, содержащихся в* 1 м^3 *при нормальных условиях, называется* ***числом Лошмидта*** [И. Лошмидт (1821–1895), австрийский физик]:

$$N_{\text{L}} = P_0 / kT_0 = 2{,}68 \cdot 10^{25}\ \text{ì}^{-3}.$$

Нормальные условия: $P_0 = 10^5$ Па; $T_0 = 273$ К.

Под ***идеальным газом*** мы будем понимать газ, молекулы которого рассматриваются в виде материальных точек и для которого:

- *радиус взаимодействия двух молекул много меньше среднего расстояния между ними* (*взаимодействуют только при столкновении*);
- *столкновения молекул между собой и со стенками сосуда – абсолютно упругие* (*выполняются законы сохранения энергии и импульса*);
- *объем всех молекул газа много меньше объема, занятого газом.*

Примечание. В молекулярно-кинетической теории и термодинамике *условием применимости классических законов* является выполнение неравенства $m\upsilon R >> h$, где m – масса, υ – скорость, R – размер пространства движения частицы, $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с – постоянная Планка. В противном случае используются *квантово-механические* представления.

3.1.2. Давление. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории

Еще в XVIII в. Даниил Бернулли предположил, что ***давление газа*** есть *следствие столкновения газовых молекул со стенками сосуда*. Именно давление чаще всего является единственным сигналом присутствия газа. Находящиеся под давлением газ или жидкость действуют с некоторой силой ΔF на любую поверхность, ограничивающую их объем. Давление на поверхность площадью ΔS равно:

$$P = \Delta F / \Delta S\,;$$

$$[P] = \text{Н}/\text{м}^2 = \text{Па}\,.$$

Внутреннее давление *является одним и тем же во всех направлениях и во всем объеме, независимо от формы сосуда*. Этот результат называется ***законом Паскаля***: *если к некоторой части поверхности, ограничивающей газ или жидкость, приложено давление* P_0, *то оно одинаково передается любой части этой поверхности.*

Одним из примеров использования закона Паскаля является гидравлический домкрат (рис. 3.1).

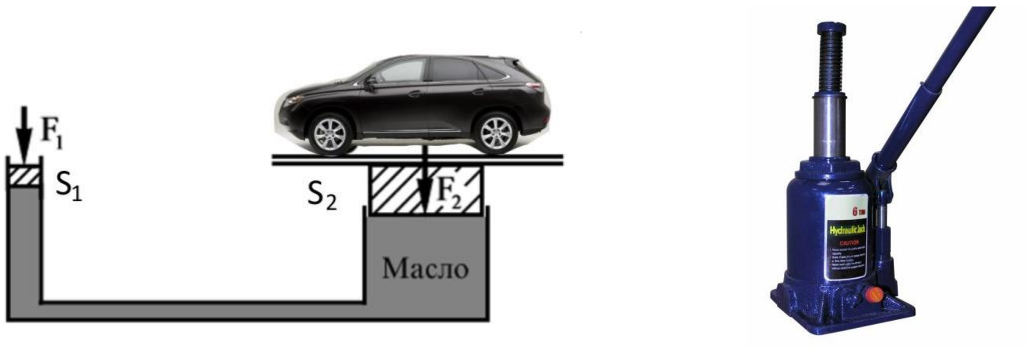


Рис. 3.1.1. Гидравлический домкрат и его внешний вид

Связь давления с кинетической энергией молекул дается выражением (***основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов***)

$$P = \frac{2}{3} n < E_\text{к} >,$$

где $< E_\text{к} >$ – средняя энергия одной молекулы; n – концентрация молекул.

Иногда за *основное уравнение принимают выражение* $P = nkT$.

Единицы измерения давления:

1 Н/м^2 = 1 Па; 1 атм = 9,8 Н/см^2 = 98066 Па ≈ 10^5 Па;

1 мм рт. ст. = 1 тор = 1/760 атм = 133,3 Па;

1 бар = 10^5 Па; 1 атм = 0,98 бар.

3.1.3. Температура и средняя кинетическая энергия теплового движения молекул

Средняя кинетическая энергия атомов и молекул служит характеристикой системы в состоянии равновесия. Чтобы связать *энергию с температурой*, австрийский физик Л. Больцман ввел коэффициент пропорциональности k, который впоследствии был назван его именем:

$$T = \frac{2}{3k}\frac{m < \upsilon_{\text{кв}}^2 >}{2}, \tag{3.1.1}$$

где k = 1,38·10^{-23} Дж·К$^{-1}$ – ***постоянная Больцмана***; m – масса молекулы; $< \upsilon_{\text{кв}}^2 > = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\upsilon_i^2}$ – *среднеквадратичная скорость*.

Величину T называют ***абсолютной температурой*** и измеряют в градусах Кельвина (К). Она служит мерой кинетической энергии теплового движения частиц идеального газа.

Из (3.1.1) получим формулы для расчетов средней кинетической энергии *для одной молекулы* и *для молярной массы* идеального газа:

$$\frac{m < \upsilon_{\text{кв}}^2 >}{2} = \frac{3}{2}kT \text{ и } \frac{\mu < \upsilon_{\text{кв}}^2 >}{2} = \frac{3}{2}RT. \tag{3.1.2}$$

Здесь $R = kN_{\text{A}}$ – универсальная газовая постоянная.

На рис. 3.1.2 приведено сравнение разных температурных шкал. На рис. 3.1.3 – шкала сравнения температур различных источников.

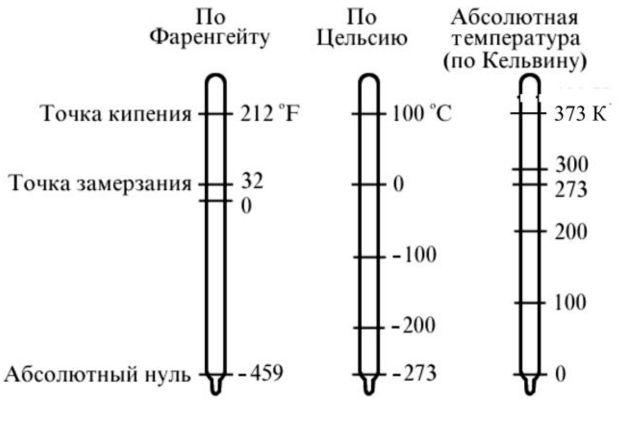


Рис. 3.1.2. Различные температурные шкалы

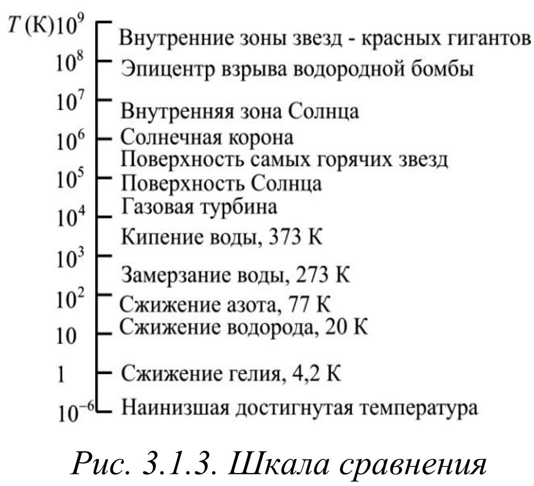


Рис. 3.1.3. Шкала сравнения температур

В физике и технике ***за абсолютную шкалу температур принята шкала Кельвина***, названная в честь знаменитого английского физика лорда Кельвина; 1 К – одна из основных единиц СИ.

Также используются другие шкалы температур:

- шкала Цельсия (шведский физик, 1842 г.) – точка таяния льда 0 °С, точка кипения воды 100 °С; T (К) = 273,15+ t °С;
- шкала Фаренгейта (немецкий физик, 1724 г.) – точка таяния льда – 32 °F, точка кипения воды – 212 °F. t °С = (5/9)(t °F – 32 °С).

Так как $m\upsilon^2/2 \ge 0$ всегда, то и T *не может* быть отрицательной величиной. Своеобразие температуры заключается в том, что она не *аддитивна* (*аддитивный – получаемый сложением*).

3.1.4. Законы идеальных газов

В XVII–XIX вв. были сформулированы опытные законы идеальных газов. ***Изопроцессы идеального газа*** *– процессы, при которых один из параметров остается неизменным.*

1. ***Изохорический процесс*** *– процесс, протекающий при* ***постоянном объеме V.*** Поведение газа при изохорическом процессе подчиняется ***закону Шарля*** [Ж. Шарль (1746–1823) – французский физик]: *при постоянном объеме и неизменных значениях массы газа и его молярной массы отношение давления газа к его абсолютной температуре остается постоянным*: P/T = const.

График изохорического процесса на PV-, PT- и Vt-диаграммах называется ***изохорой*** и изображен на рис. 3.1.4.

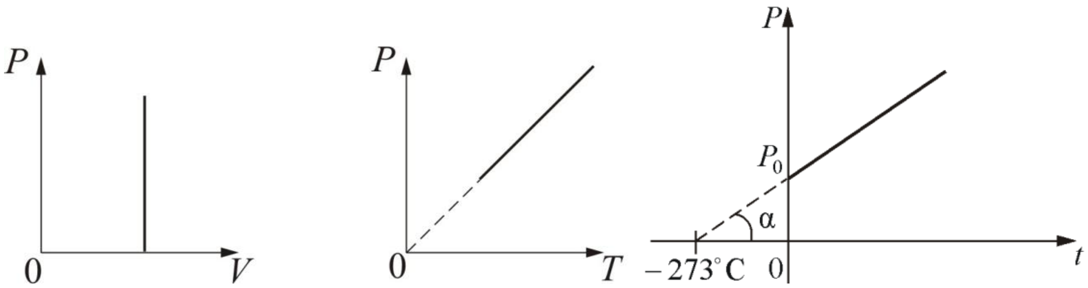


Рис. 3.1.4. Графики изохорического процесса

Если температура газа выражена в градусах Цельсия, то уравнение изохорического процесса записывается в виде:

$$P = P_0(1+\alpha t), \tag{3.1.3}$$

где P_0 – давление при 0 °С; α =1/273 град$^{-1}$ – температурный коэффициент.

2. ***Изобарический процесс –*** *процесс, протекающий при* ***постоянном давлении*** *P*. Поведение газа при изобарическом процессе подчиняется ***закону Гей-Люссака*** [Ж. Гей-Люссак (1778–1850) – французский ученый]: *при постоянном давлении и неизменных значениях массы, газа и его молярной массы отношение объема газа к его абсолютной температуре остается постоянным*: V/T = const.

3. ***Изотермический процесс –*** *процесс, протекающий при* ***постоянной температуре*** *T*. Поведение газа при изотермическом процессе подчиняется ***закону Бойля–Мариотта*** [Р. Бойль (1627–1691) – английский и Э. Мариотт (1620–1684) – французский физики]: *при постоянной температуре и неизменных значениях массы газа и его молярной массы произведение объема газа на его давление остается постоянным*: $PV = \text{const}$.

4. ***Адиабатический процесс*** (*изоэнтропийный*) $\Delta S = 0$, $S = \text{const}$.

Адиабатический процесс – термодинамический процесс, происходящий без теплообмена с окружающей средой.

Уравнение адиабаты – $V^{\gamma} P = \text{const}$, где γ – показатель адиабаты.

На рис. 3.1.5 показаны графики различных изопроцессов в *PV*-координатах.

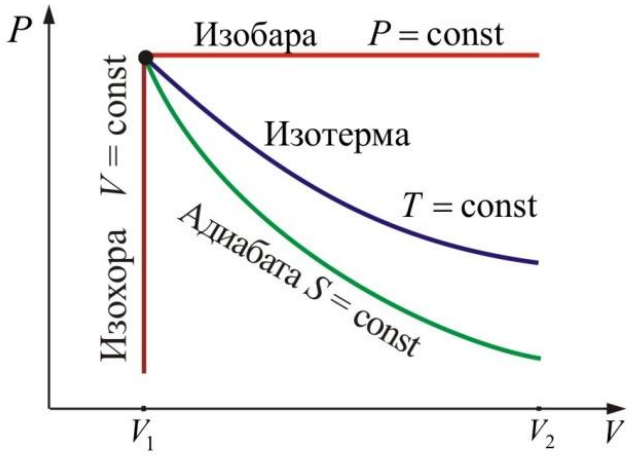


Рис. 3.1.5. Графики различных изопроцессов в PV-координатах. Адиабата всегда идет круче, чем изотерма

5. ***Политропический процесс*** – *процесс, при котором теплоемкость газа остается постоянной*. Политропический процесс – общий случай всех перечисленных выше процессов.

6. ***Закон Авогадро***: *моли любых газов при одинаковых температуре и давлении занимают одинаковые объемы.* При нормальных условиях объем моля

$$V_{\mu} = 22{,}41 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3/\text{моль}.$$

7. ***Закон Дальтона*** [Д. Дальтон (1766–1844) – английский физик]. *Давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений P входящих в нее газов*

$$P_{\text{см}} = P_1 + P_2 + \ldots + P_n. \qquad (3.1.4)$$

Парциальное давление P_n – давление, которое оказывал бы данный газ, если бы он один занимал весь объем.

8. ***Объединенный газовый закон*** (*закон Клапейрона*).

В соответствии с законами Бойля–Мариотта и Гей-Люссака французский инженер Б. Клапейрон сделал заключение, что для данной массы газа

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \text{ или } \frac{PV}{T} = \text{const}. \qquad (3.1.5)$$

9. ***Уравнение состояния идеального газа*** (*уравнение Менделеева–Клапейрона*). Великий русский ученый Д.И. Менделеев объединил известные законы Бойля–Мариотта, Гей-Люссака и Шарля с законом Авогадро:

$$PV = \frac{m}{\mu}RT, \qquad (3.1.6)$$

где $\frac{m}{\mu} = \nu$ – количество вещества.

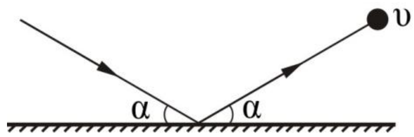
Контрольные вопросы. Упражнения

1. Почему термодинамический и статистический (молекулярно-кинетический) методы исследования макроскопических систем качественно различны и взаимно дополняют друг друга?
2. Что такое термодинамические параметры? Какие термодинамические параметры известны?
3. Как объяснить закон Бойля–Мариотта с точки зрения молекулярно-кинетической теории? Какими законами описываются изобарные и изохорные процессы? Перечислите основные законы идеальных газов.
4. Каков физический смысл числа Авогадро? Числа Лошмидта?
5. При некоторых значениях температуры и давления азот количеством вещества занимает объем 20 л. Какой объем при этих же условиях займет водород количеством вещества 1 моль?
6. В чем заключается молекулярно-кинетическое толкование давления газа? Термодинамической температуры?
7. В чем содержание и какова цель вывода основного уравнения молекулярно-кинетической теории газов?
8. Приведите уравнения состояния идеального газа.
9. Почему динамическое описание системы многих частиц неосуществимо с технической, непригодно с теоретической и бесполезно с практической точек зрения?
10. В чем (в общих чертах) состоит термодинамический метод описания системы многих частиц?

11. Как глубоко нужно нырнуть в озеро, чтобы давление на 50 % превысило давление на поверхности?

12. Оцените давление и температуру в центре Юпитера. Его масса $1{,}9 \cdot 10^{27}$ кг, радиус $7{,}2 \cdot 10^{4}$ км.

13. Части массой m и скоростью υ падает на стенку под углом 30°, как показано на рисунке. Она отскакивает с той же скоростью также под углом 30°. Насколько изменится импульс частицы? Какой импульс получит стенка?



14. В ящике объемом V имеется N частиц, причем средняя кинетическая энергия одной частицы равна $E_к$. Найдите следующие величины, записав ответ через $V, N, E_к$ и k:

а) полную кинетическую энергию системы;

б) температуру системы;

в) давление системы;

г) что произойдет с давлением и температурой, если удвоить объем системы, соединив ящик с другим пустым ящиком такого же объема?

3.2. Статистические распределения

3.2.1. Скорости газовых молекул

В середине XIX в. была сформулирована молекулярно-кинетическая теория, но тогда не было никаких доказательств существования самих молекул. Вся теория базировалась на предположении о движении молекул, но как измерить скорость их движения, если они невидимы? Теоретики первыми нашли выход. Из уравнения молекулярно-кинетической теории газов известно, что

$$\frac{m < \upsilon_{кв}^2 >}{2} = \frac{3}{2} kT,$$

отсюда $< \upsilon_{кв} > = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$.

Получена формула для расчета ***среднеквадратичной скорости***, но масса молекулы m неизвестна. Запишем по-другому значение $\upsilon_{кв}$:

$$< \upsilon_{кв} > = \sqrt{\frac{3kN_A T}{mN_A}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}; \ P = RT\frac{\rho}{\mu},$$

тогда

$$< \upsilon_{кв} > = \sqrt{\frac{3P}{\rho}},$$

где P – давление; ρ – плотность. Это уже измеряемые величины, и можно найти скорость молекул. Как показывает опыт, имеется большой разброс скоростей. Например, при t = 0 °C и $P = 1$ атм скорости молекул азота $\upsilon_{N_2} = 500$ м/с. Для водорода $\upsilon_{H_2} = 2000$ м/с.

Проверка того факта, что атомы и молекулы идеальных газов в термически равновесном пучке имеют различные скорости, была осуществлена немецким физиком Отто Штерном в 1920 г.

В опыте было получено значение среднеквадратичной скорости $< \upsilon_{кв} >= 584$ м/с. Разброс скоростей при этом был от 560 до 640 м/с.

Таким образом, опытным путем были не только измерены скорости газовых молекул, но и показано, что они имеют большой разброс по скоростям. Причина – в хаотичности теплового движения молекул.

3.2.2. Вероятность события

С точки зрения атомно-молекулярного строения вещества величины, встречающиеся в макроскопической физике, имеют смысл средних значений, которые принимают некоторые функции от микроскопических переменных системы. Величины такого рода называются вероятностными, или статистическими. Примерами таких величин являются давление, температура, плотность и др. Большое число сталкивающихся атомов и молекул обусловливает важные закономерности в поведении статистических переменных, не свойственные отдельным атомам и молекулам.

Математическое определение вероятности: ***вероятность*** *какого-либо события – это предел, к которому стремится отношение числа случаев, приводящих к осуществлению события, к общему числу случаев при бесконечном увеличении последних*:

$$W_i = \lim_{n\to\infty} \frac{n_i}{n}.$$

Здесь n_i – число случаев, когда событие произошло, а n – общее число опытов. Отсюда следует, что W может принимать значения от нуля до единицы: $0 \le W \le 1$.

Функция распределения вероятности

Определить распределение молекул по скоростям вовсе не значит, что нужно определить число молекул, обладающих той или иной заданной скоростью. Вопрос нужно поставить так: *сколько молекул обладает скоростями, лежащими в интервале, включающем заданную скорость*?

Необходимо найти число частиц (Δn), скорости которых лежат в определенном интервале значения скорости $\Delta\upsilon$ (от υ до $\upsilon + \Delta\upsilon$), т. е. Δn – *число благоприятных молекул*, попавших в этот интервал:

$$\Delta n = f(\upsilon) n \Delta\upsilon,$$

где $f(\upsilon)$ – ***функция распределения*** *молекул по скоростям*.

Физический смысл $f(\upsilon)$ в том, что это *отношение числа молекул, скорости которых лежат в определенном интервале скоростей, к общему числу молекул в единичном интервале скоростей*:

$$f(\upsilon) = \mathrm{d}n/n. \qquad (3.2.1)$$

В данном случае $f(\upsilon)$ *имеет смысл* ***плотности вероятности***, т. е. показывает, какова *вероятность* любой молекулы газа в единице объема иметь скорость, заключенную *в единичном интервале*, включающем заданную скорость υ.

3.2.3. Функция распределения Максвелла

Пусть имеется *n* тождественных молекул, находящихся в состоянии беспорядочного теплового движения при определенной температуре. После каждого акта столкновения между молекулами их скорости меняются случайным образом. В результате невообразимо большого числа столкновений устанавливается стационарное равновесное состояние, когда число молекул в заданном интервале скоростей сохраняется постоянным.

Распределение молекул идеального газа по скоростям впервые было получено знаменитым английским ученым Дж. Максвеллом в 1860 г. с помощью методов теории вероятностей.

Функция распределения Максвелла характеризует распределение молекул по скоростям и определяется отношением кинетической энергии молекулы $m\upsilon^2/2$ к средней энергии ее теплового движения kT:

$$f(\upsilon) = \frac{\mathrm{d}n}{n\mathrm{d}\upsilon} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m\upsilon^2}{2kT}\right)\upsilon^2. \qquad (3.2.2)$$

Эта функция обозначает долю молекул единичного объема газа, абсолютные скорости которых заключены в интервале скоростей от υ до $\upsilon + \Delta\upsilon$, включающем данную скорость.

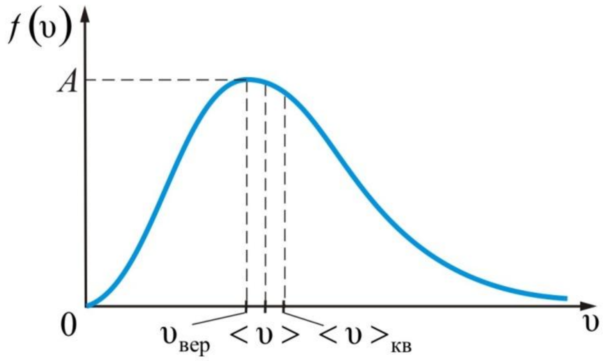


Рис. 3.2.1. График функции распределения Максвелла: показаны наиболее вероятная, среднеарифметическая и среднеквадратичная скорости газовых молекул, причем $\langle \upsilon \rangle / \upsilon_{\text{вер}} = 1{,}13$; $\langle \upsilon \rangle_{\text{кв}} / \upsilon_{\text{вер}} = 1{,}22$

Обозначим множитель перед экспонентой через A, тогда из уравнения (3.2.2) получим окончательное выражение ***функции распределения Максвелла***:

$$f(\upsilon) = A\exp\left(-\frac{m\upsilon^2}{2kT}\right)\upsilon^2. \qquad (3.2.3)$$

График этой функции показан на рис. 3.2.1.

Средние скорости распределения Максвелла

Из графика функции распределения Максвелла, приведенного на рис. 3.2.1, видно, что ***наиболее вероятная скорость*** – *скорость, на которую приходится максимум зависимости.*

- *Наиболее вероятная скорость молекулы*

$$\upsilon_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \text{ или для одного моля газа } \upsilon_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}.$$

- *Среднеарифметическая скорость молекулы*

$$<\upsilon> = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \text{ или для одного моля газа } <\upsilon> = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}.$$

- *Среднеквадратичная скорость молекулы*

$$<\upsilon>_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \text{ или для одного моля газа } <\upsilon>_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

Зависимость функции распределения Максвелла от массы молекул и температуры газа

На рис. 3.2.2 показано, что при увеличении массы молекул ($m_1 > m_2 > m_3$) и при уменьшении температуры ($T_1 < T_2 < T_3$) максимум функции распределения Максвелла смещается вправо, в сторону увеличения скоростей.

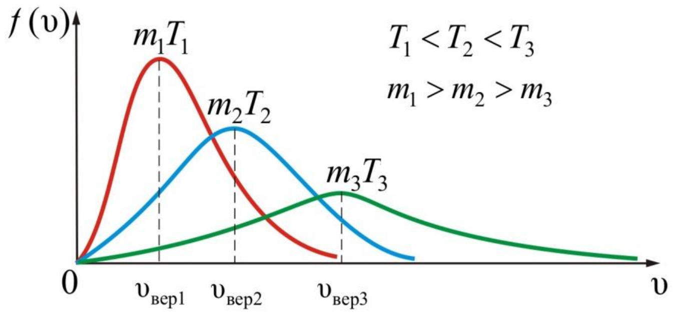


Рис. 3.2.2. Максвелловское распределение скоростей молекул, имеющих разные массы и температуры

Площадь под кривой – величина постоянная, равная единице, поэтому важно знать, как будет изменяться положение максимума кривой:

$$f(\upsilon) \sim \sqrt{m/T}, \text{ кроме того, } \upsilon \sim \sqrt{T/m}.$$

Выводы:

- *Вид распределения молекул газа по скоростям* ***зависит от рода газа и от температуры****. Давление P и объем газа V на распределение молекул не влияют.*
- *В показателе степени f(υ) стоит отношение кинетической энергии, соответствующей данной скорости, к средней энергии теплового движения молекул; значит,* ***распределение Максвелла характеризует распределение молекул по значениям кинетической энергии.***
- ***Максвелловский закон – статистический*** *и выполняется тем лучше, чем больше число молекул.*

Формула Максвелла для относительных скоростей

Относительную скорость обозначим через $u = \upsilon/\upsilon_{\text{вер}}$. Тогда получим ***закон распределения Максвелла*** в приведенном виде:

$$f(u) = \frac{\mathrm{d}n}{n\mathrm{d}u} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-u^2\right)u^2.$$

Это уравнение универсальное. В таком виде *функция распределения не зависит ни от рода газа, ни от температуры.*

3.2.4. Барометрическая формула

Атмосферное давление на какой-либо высоте h обусловлено весом слоев газа, лежащих выше. Пусть P – давление на высоте h, а $P + \mathrm{d}P$ – на высоте $h + \mathrm{d}h$ (рис. 3.2.3).

Разность давления $P - (P + \mathrm{d}P)$ равна весу газа, заключенного в объеме цилиндра с площадью основания, равной единице, и высотой dh.

Так как $P = \rho g h,$ где $\rho = P\mu/RT$ – плотность газа на высоте h, медленно убывающая с высотой, то можно записать: $P - (P + \mathrm{d}P) = \rho g \mathrm{d}h$.

Отсюда можно получить ***барометрическую формулу***, показывающую зависимость атмосферного давления от высоты:

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right). \tag{3.2.4}$$

Из барометрической формулы следует, что давление убывает с высотой тем быстрее, чем тяжелее газ (чем больше μ) и чем ниже температура. Например, на больших высотах концентрация легких газов He и H_2 гораздо больше, чем у поверхности Земли (рис. 3.2.4).

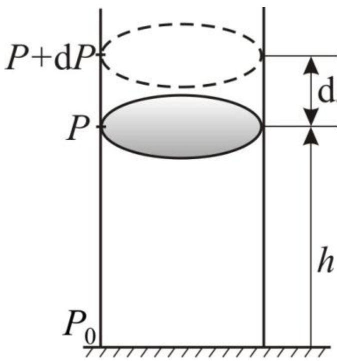


Рис. 3.2.3. К выводу барометрической формулы

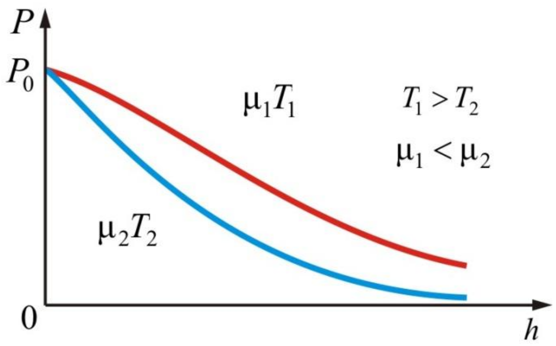


Рис. 3.2.4. Зависимость давления от высоты при разных молярных массах и температурах

3.2.5. Распределение Больцмана

Исходя из основного уравнения молекулярно-кинетической теории $P = nkT$, заменим P и P_0 в барометрической формуле (3.2.4) на n и n_0 и получим *распределение молекул во внешнем потенциальном поле* – ***распределение Больцмана***:

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right), \text{ или } n = n_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right), \qquad (3.2.5)$$

где n_0 и n – число молекул в единичном объеме на высоте $h = 0$ и h.

С уменьшением температуры число молекул на высотах, отличных от нуля, убывает. При T = 0 тепловое движение прекращается, все молекулы расположились бы на земной поверхности. При высоких температурах, наоборот, молекулы оказываются распределенными по высоте почти равномерно, а плотность молекул медленно убывает с высотой. Так как mgh – это потенциальная энергия $E_п$, то на разных высотах $E_п = mgh$ – различна. Следовательно, уравнение (3.2.5) характеризует распределение частиц по значениям потенциальной энергии:

$$n = n_0 \exp(-E_п/kT) \qquad (3.2.6)$$

– ***это закон распределения частиц по потенциальным энергиям – распределение Больцмана***.

Закон Максвелла–Больцмана

Итак, закон Максвелла дает распределение частиц по значениям кинетической энергии, а закон Больцмана – распределение частиц по значениям потенциальной энергии. Учитывая, что полная энергия $E = E_п + E_к$, оба распределения можно объединить в единый ***закон Максвелла–Больцмана***: $\mathrm{d}n = n_0 A \exp\left(-\frac{E}{kT}\right)$.

Контрольные вопросы. Упражнения

1. Сравните скорости движения газовых молекул со скоростью звука.
2. Каковы результаты и физический смысл опыта Штерна?
3. Понятие вероятности события.
4. Каков физический смыл функции распределения молекул по скоростям?
5. Каков физический смысл плотности вероятности распределения молекул по скоростям?
6. Проанализируйте график функции распределения молекул по скоростям.
7. Как определяется наиболее вероятная скорость? Средняя скорость? Среднеарифметическая скорость?
8. Приведите формулу Максвелла для относительных скоростей.
9. Приведите зависимость функции распределения Максвелла от массы молекул и температуры газа.
10. Каков физический смыл распределения молекул по энергиям?
11. Как, зная функцию распределения молекул по скоростям, перейти к функции распределения по энергиям?
12. Во сколько раз и как изменится средняя скорость движения молекул при переходе от кислорода к водороду?
13. Приведите барометрическую формулу.
14. В чем суть распределения Больцмана?
15. Каков физический смысл закона Максвелла–Больцмана?
16. Приведите распределение Бозе–Эйнштейна и Ферми–Дирака.
17. Какие частицы называются бозоны и фермионы?
18. Найти среднюю квадратичную $\langle \upsilon_{кв} \rangle$, среднюю арифметическую $\langle \upsilon \rangle$ и наиболее вероятную $\upsilon_в$ скорости молекул водорода. Вычисления выполнить для трех значений температуры: 1) $T = 20$ К; 2) $T = 300$ К; 3) $T = 5000$ К.
19. Какова вероятность W того, что данная молекула идеального газа имеет скорость, отличную от $1/2\upsilon_в$ не более чем на 1 %?
20. Пылинки, взвешенные в воздухе, имеют массу $m = 10^{-18}$ г. Во сколь раз уменьшится их концентрация n при увеличении высоты на $\Delta h = 10$ м? Температура воздуха $T = 300$ К.
21. Определить силу F, действующую на частицу, находящуюся во внешнем однородном поле силы тяжести, если отношение $n1/n2$ концентрацией частиц на двух уровнях, отстоящих друг от друга на $\Delta z = 1$ м, равное e. Температуру T считать везде одинаковой и равной 300 К.
22. На какой высоте h над поверхностью Земли атмосферное давление вдвое меньше, чем на ее поверхности? Считать, что температура T воздуха равна 290 К и не изменяется с высотой.

3.3. Элементы физической кинетики

3.3.1. Число столкновений и длина свободного пробега молекул в газах

Из п. 3.2.1 известно, что молекулы в газе движутся со скоростью звука, примерно с такой же скоростью движется пуля. Однако, находясь в противоположном конце комнаты, запах разлитой пахучей жидкости мы почувствуем через сравнительно большой промежуток времени. Это происходит потому, что молекулы движутся хаотически, сталкиваются друг с другом, траектория движения у них ломаная.

Пусть λ_i – длина свободного пробега молекулы (рис. 3.3.1).

Расстояние, проходимое молекулой в среднем без столкновений, называется ***средней длиной свободного пробега*** *$\langle\lambda\rangle$.*

Средняя длина свободного пробега молекулы $\langle\lambda\rangle = \langle\upsilon\rangle\langle\tau\rangle$, где $\langle\upsilon\rangle$ – средняя скорость теплового движения; τ – среднее время между двумя столкновениями.

Пусть σ – ***эффективное сечение*** молекулы, т. е. ***полное поперечное сечение рассеяния***, характеризующее столкновение между двумя молекулами (рис. 3.3.2).

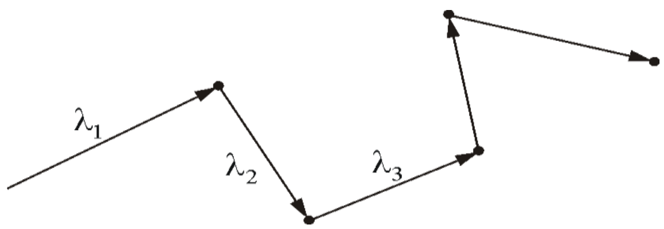


Рис. 3.3.1. К нахождению средней длины свободного пробега молекул в газе

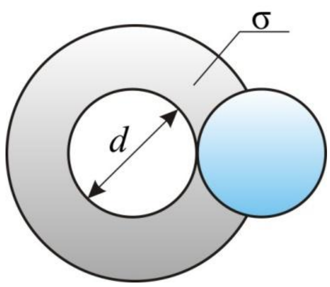


Рис. 3.3.2. Эффективное сечение молекулы

$\sigma = \pi d^2$ – площадь, в которую не может проникнуть центр любой другой молекулы. Здесь $d = 2r$ – диаметр молекулы.

За одну секунду молекула проходит путь, равный средней арифметической скорости $\langle\upsilon\rangle$. За ту же секунду молекула претерпевает в среднем $\langle\nu\rangle$ столкновений:

$$\langle\nu\rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n\langle\upsilon\rangle = \sqrt{2}\sigma n\langle\upsilon\rangle,$$

следовательно,

$$\langle\lambda\rangle = \frac{\langle\upsilon\rangle}{\langle\nu\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n} = \frac{kT}{\sqrt{2}\sigma P}.$$

Таким образом, при заданной температуре *средняя длина свободного пробега обратно пропорциональна давлению* P. С ростом давления $<\lambda>$ уменьшается, поскольку возрастает число молекул и их соударений.

Например, при $d = 3\text{Å} = 3\cdot 10^{-10}$ м, P = 1 атм, T = 300 К, средняя длина свободного пробега $<\lambda> = 10^{-7}$ м, а т. к. $<\upsilon> = 10^3$ м/с, то среднее число столкновений $<\nu> = 10^3/10^{-7} = 10^{10}$.

3.3.2. Явления переноса в газах

Особые *необратимые* процессы, возникающие в термодинамически неравновесных системах, называются явлениями *переноса*. К ним относятся ***диффузия*** (перенос массы); ***теплопроводность*** (перенос энергии) и ***вязкость*** или ***внутреннее трение*** (перенос импульса).

Диффузия от латинского *diffusio – распространение, растекание – взаимное проникновение соприкасающихся веществ друг в друга вследствие теплового движения частиц вещества*. Диффузия происходит в направлении уменьшения концентрации вещества и ведет к его равномерному распределению по занимаемому объему. Диффузия имеет место в газах, жидкостях и твердых телах. Наиболее быстро диффузия происходит в газах, медленнее – в жидкостях, еще медленнее – в твердых телах, что обусловлено характером движения частиц в этих средах.

Для газа диффузия – это распределение молекул примеси от источника (или взаимная диффузия газа).

Диффузионный поток пропорционален градиенту концентрации и рассчитывается по ***закону Фика***:

$$J = -D\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}, \text{ или } J = -D\,\mathrm{grad}\,n.$$

Знак минус в уравнении Фика показывает, что диффузионный поток направлен в сторону уменьшения концентрации. При этом коэффициент диффузии D численно равен диффузионному потоку через единицу площади в единицу времени при $\mathrm{grad}\,n = 1$. Измеряется коэффициент диффузии в м/с^2. Согласно кинетической теории газов коэффициент диффузии D равен:

$$D = \frac{1}{3}<\lambda><\upsilon>.$$

Так как $<\lambda> = \dfrac{kT}{\sqrt{2}\sigma P}$, а $<\upsilon> = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}$, получаем, что коэффициент диффузии $D \sim T^{3/2}/\left(P\sqrt{\mu}\right)$. Таким образом, с увеличением температуры диффузия в газах ускоряется, с ростом давления – замедляется. Диффузия в газах с тяжелыми молекулами протекает медленнее.

Внутреннее трение (***вязкость***) возникает между слоями газа или жидкости, перемещающимися параллельно друг другу с разными по модулю скоростями. Если какое-либо тело движется в газе, то оно сталкивается с молекулами газа и сообщает им импульс. С другой стороны, тело тоже будет испытывать соударения со стороны молекул и получать собственный импульс, но направленный в противоположную сторону. Газ ускоряется, тело тормозится, т. е. на тело действуют силы трения. Такая же сила трения будет действовать и между двумя соседними слоями газа, движущимися с разными скоростями.

Таким образом, причиной внутреннего трения в газах является перенос импульса из одного слоя в другой. Сила трения пропорциональна градиенту скорости и описывается ***законом Ньютона***:

$$f = -\eta \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}x}, \text{ или } f = -\eta \,\mathrm{grad}\,\vec{\upsilon}.$$

Здесь η – ***коэффициент динамической вязкости***, зависящей от плотности газа ρ:

$$\eta = \frac{1}{3} < \lambda >< \upsilon > nm = D\rho.$$

Физический смысл η *в том, что он численно* ***равен импульсу***, *переносимому в единицу времени через единицу площади при градиенте скорости, равном единице.* Коэффициент вязкости газов не зависит от давления газа и растет с повышением температуры пропорционально $\sqrt{T}$.

Теплопроводностью *называется явление переноса внутренней энергии из одного слоя газа в другой*. Если в соседних слоях газа создана и поддерживается разность температур, то между ними будет происходить обмен тепла. Благодаря хаотическому движению молекулы в соседних слоях будут перемешиваться и их средние энергии будут выравниваться. Происходит перенос энергии от более нагретых слоев к более холодным телам. ***Тепловой поток*** q пропорционален градиенту температуры и подчиняется ***закону Ж. Фурье***:

$$q = -\chi \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}, \text{ или } q = -\chi \,\mathrm{grad}\,T.$$

Кинетическая теория газов дает для ***коэффициента теплопроводности*** χ следующее выражение:

$$\chi = \frac{1}{3} < \lambda >< \upsilon > n \frac{i}{2} k, \text{ или } \chi = \frac{1}{3} < \lambda >< \upsilon > \rho C_{V\text{уд}},$$

где $C_{V\text{уд}}$ – удельная теплоемкость при постоянном объеме.

3.3.3. Понятие о вакууме

Газ называется ***разреженным****, если его плотность столь мала, что средняя длина свободного пробега молекул λ может быть сравнима с линейными размерами l сосуда, в котором находится газ*. Такое состояние газа называется ***вакуумом***.

Различают следующие степени вакуума: *сверхвысокий* ($\lambda >> l$), *высокий* ($\lambda > l$), *средний* ($\lambda \approx l$) и *низкий вакуум*.

Свойства разреженных газов отличаются от свойств неразреженных газов. Это видно из табл. 3.3.1, где приведены некоторые характеристики различных степеней вакуума.

Таблица 3.3.1

Характеристика	Вакуум			
	низкий	средний	высокий	сверхвысокий
	$\lambda < l$	$\lambda \approx l$	$\lambda > l$	$\lambda >> l$
Давление в мм рт. ст.	760 – 1	$1 - 10^{-3}$	$10^{-3} - 10^{-7}$	10^{-8} и менее
Число молекул в ед. объема (в м$^{-3}$)	$10^{25} - 10^{22}$	$10^{22} - 10^{19}$	$10^{19} - 10^{13}$	10^{13} и менее
Зависимость от давления коэффициентов χ и η	Не зависят от давления	Определяется параметром $\frac{\lambda}{l}$	Прямо пропорциональны давлению	Теплопроводность и вязкость отсутствуют

Если из сосуда откачивать газ, то по мере понижения давления число столкновений молекул друг с другом уменьшается, что приводит к увеличению их длины свободного пробега.

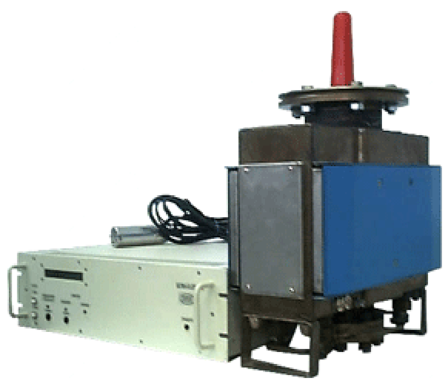


Рис. 3.3.3. Современные вакуумные насосы: слева – форвакуумный, справа – магниторазрядный высоковакуумный насос типа «НОРД»

Вопросы создания вакуума имеют большое значение в науке и технике, т. к., например, во многих современных электронных приборах используются электронные пучки, формирование которых возможно лишь в условиях вакуума. Для получения различных степеней разрежения применяются современные вакуумные насосы (рис. 3.3.3), позволяющие получить предварительное разрежение (форвакуум) до ≈ 0,13 Па, а также высоковакуумные насосы и лабораторные приспособления, позволяющие получить давление до 13,3 мкПа – 1,33 пПа (10^{-7} – 10^{-14} мм рт. ст.).

Контрольные вопросы. Упражнения

1. Перечислите явления переноса, происходящие в газах.
2. В чем сущность явлений переноса? Каковы они и при каких условиях возникают?
3. Дайте определение средней длины свободного пробега.
4. Какой физический смысл эффективного сечения молекул?
5. Зависит ли средняя длина свободного пробега молекул от температуры газа? Почему?
6. Как изменится средняя длина свободного пробега молекул с увеличением давления?
7. Объясните физическую сущность законов Фурье, Фика, Ньютона.
8. Каков физический смысл коэффициентов переноса?
9. Представьте графическую зависимость коэффициентов переноса от давления.
10. Что такое молекулярное течение, эффузия газов?
11. Дайте понятие о вакууме.
12. Дайте определение эффекта Кнудсена.
13. Найти среднюю длину свободного пробега l молекул водорода при давлении $P = 0{,}1$ Па и температуре $T = 100$ К.
14. При каком давлении P средняя длина свободного пробега l молекул азота равна 1 м, если температура T газа равна 300 К.
15. Баллон вместимостью $V = 10$ л содержит водород массой $m = 1$ г. Определить среднюю длину свободного пробега l молекул.
16. Средняя длина свободного пробега l атомов гелия при нормальных условиях равна 200 нм. Определить коэффициент диффузии D гелия.
17. Коэффициент диффузии D кислорода при температуре $T = 0°$ С равен 0,19 см^2/с. Определить среднюю длину свободного пробега l молекул кислорода.

3.4. Первое начало термодинамики. Внутренняя энергия. Работа и теплота

3.4.1. Внутренняя энергия. Работа и теплота

Наряду с механической энергией любое тело (или система) обладает *внутренней энергией*. Внутренняя энергия – энергия покоя. Она складывается из теплового хаотического движения *молекул*, составляющих тело, потенциальной энергии *их взаимного* расположения, кинетической и потенциальной энергии *электронов* в атомах*, нуклонов* в ядрах и т. д.

В термодинамических процессах изменяется только кинетическая энергия движущихся молекул (тепловой энергии недостаточно, чтобы изменить строение атома, а тем более ядра). Следовательно, фактически *под внутренней энергией* в термодинамике подразумевают энергию *теплового хаотического* движения молекул.

Внутренняя энергия U одного моля идеального газа равна:

$$U = E_{\text{к}} N_{\text{А}} = \frac{3}{2} kTN_A = \frac{3}{2} RT,$$

т. е.

$$U = \frac{3}{2} RT\,.$$

В термодинамике важно знать не абсолютное значение внутренней энергии, а ее изменение: $\mathrm{d}U = (3/2)R\mathrm{d}T$.

Из этих формул видно, что *внутренняя энергия зависит только от температуры*. ***Внутренняя энергия U является функцией состояния системы*** независимо от предыстории.

При расширении газа совершается ***работа***. Допустим, что газ заключен в сосуд, отделен от окружающего пространства невесомым поршнем и занимает объем V_1 (рис. 3.4.1). Давление газа в сосуде уравновешено давлением атмосферы P (изобарный процесс). Нагреем газ, передадим ему количество теплоты Q. Тогда газ, расширяясь, поднимет поршень на величину Δh, совершая работу:

$$A = F\Delta h,$$

где $F = PS$ – сила давления атмосферы; S – площадь поршня.

Следовательно, работа $A = PS\Delta h = P\Delta V$, где $\Delta V = V_2 - V_1$ – изменение объема газа при нагревании.

Давление P – величина всегда положительная. При расширении газа $\Delta V > 0$, газ совершает положительную работу. Если газ сжимается, то $\Delta V < 0$ и работа $A < 0$. В этом случае работу над газом совершают внешние силы.

Итак, работа и теплота не есть особые формы энергии. Нельзя говорить о запасе теплоты или работы. Это *мера переданной* другой системе механической или внутренней энергии.

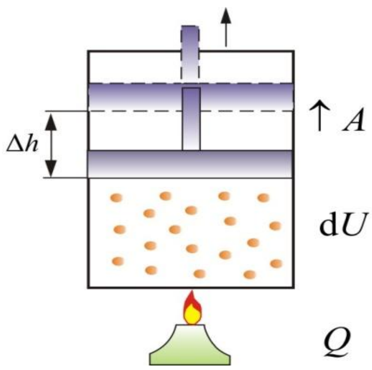


Рис. 3.4.1. Работа газа в термодинамике (A = PΔV)

Механическая энергия может переходить в тепловую энергию и обратно. Например, если стучать молотком по наковальне, то через некоторое время молоток и наковальня нагреются (это пример *диссипации* энергии).

Опыт показывает, что во всех случаях *превращение механической энергии в тепловую и обратно совершается всегда в строго эквивалентных количествах*. В этом и состоит суть первого начала термодинамики, следующего из закона сохранения энергии.

Количество теплоты, сообщаемой телу, идет на увеличение внутренней энергии и на совершение телом работы:

$$Q = \Delta U + A \tag{3.4.1}$$

– это и есть ***первое начало термодинамики***, или ***закон сохранения энергии в термодинамике*** (*в интегральной форме*).

Первое начало термодинамики (3.4.1) для бесконечно малого изменения состояния системы будет иметь вид (*первое начало термодинамики в дифференциальной форме*):

$$\delta Q = \mathrm{d}U + \delta A. \tag{3.4.2}$$

В этом выражении U – функция состояния системы; изменение энергии $\mathrm{d}U$ – ее *полный дифференциал*, а δQ и δA – бесконечно малые приращения *теплоты и работы – таковыми не являются*.

В каждом состоянии система обладает определенным (и только таким) значением внутренней энергии, поэтому можно записать:

$$U = \int_2^2 \mathrm{d}U = U_2 - U_1.$$

Важно отметить, что *теплота Q и работа A зависят* от того, каким образом совершен переход из состояния 1 в состояние 2 (изохорически, адиабатически и т. д.), *а внутренняя энергия U – не зависит*. При этом нельзя сказать, что система обладает определенным для данного состояния значением теплоты и работы.

Особое значение в термодинамике имеют круговые или циклические процессы, при которых система, пройдя ряд состояний, возвращается в исходное состояние. Так как U – функция состояния, то в циклическом процессе $\oint \mathrm{d}U = 0$. Это справедливо для любой функции состояния.

Если $\Delta U = 0$, *то, согласно первому началу термодинамики,* $A = Q$, *т. е. нельзя построить периодически действующий двигатель, который совершал бы бóльшую работу, чем количество сообщенной ему извне энергии. Иными словами,* ***вечный двигатель первого рода невозможен****. Это одна из формулировок первого начала термодинамики.*

Следует отметить, что *первое начало термодинамики не указывает, в каком направлении идут процессы изменения состояния*, что является одним из его недостатков.

3.4.2. Теплоемкость идеального газа

Теплоемкость *тела характеризуется количеством теплоты, необходимой для нагревания этого тела на один градус*:

$$C = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}. \tag{3.4.3}$$

Размерность теплоемкости – $[C]$ = Дж/К.

Однако теплоемкость – величина неопределенная, поэтому пользуются понятиями удельной и молярной теплоемкости.

Удельная теплоемкость ($C_{\text{уд}}$) есть количество теплоты, необходимое для нагревания единицы массы вещества на 1 градус; $[C_{\text{уд}}]$ = Дж/К.

Для газов удобно пользоваться ***молярной теплоемкостью***; C_μ – *количество теплоты, необходимое для нагревания 1 моля газа на 1 градус*:

$$C_\mu = C_{\text{уд}}\,\mu,\ [C_\mu] = \text{Дж/(моль·К)}. \tag{3.4.4}$$

Теплоемкость термодинамической системы зависит от того, как изменяется состояние системы при нагревании.

Если газ нагревать при *постоянном объеме*, то все подводимое тепло идет на нагревание газа, т. е. изменение его внутренней энергии. Теплоемкость при этом обозначается C_V.

C_P – *теплоемкость при постоянном давлении*. Если нагревать газ при постоянном давлении P в сосуде с поршнем, то поршень поднимется на некоторую высоту h, т. е. газ совершит работу (рис. 3.4.1).

Следовательно, проводимое тепло затрачивается и на нагревание, и на совершение работы. Отсюда ясно, что $C_P > C_V$.

Итак, проводимое тепло и теплоемкость *зависят от того, каким путем осуществляется передача тепла*. Значит, теплоемкость C, как и Q, и A, *не является функцией состояния.*

Величины C_P и C_V оказываются связанными простым соотношением, называемым ***уравнением Майера***:

$$C_P = C_V + R. \tag{3.4.5}$$

Используя это соотношение, Роберт Майер в 1842 г. вычислил механический эквивалент теплоты: 1 кал = 4,19 Дж.

Из уравнения (3.4.5) следует: *физический смысл универсальной газовой постоянной состоит в том, что R численно равна работе, совершаемой одним молем газа при нагревании на один градус в изобарическом процессе.*

3.4.3. Закон о равномерном распределении энергии по степеням свободы

Числом степеней свободы i называется *число независимых переменных, определяющих положение тела в пространстве*.

Положение одноатомной молекулы, как и материальной точки, задается тремя координатами, поэтому она имеет три степени свободы (рис. 3.4.2).

Многоатомная молекула может еще и вращаться. Например, у двухатомных молекул вращательное движение можно разложить на два независимых вращения, а любое вращение можно разложить на три вращательных движения вокруг взаимно перпендикулярных осей. Но для двухатомной молекулы вращение вокруг ее собственной оси не изменит ее положение в пространстве, а момент инерции относительно этой оси равен нулю (рис. 3.4.2).

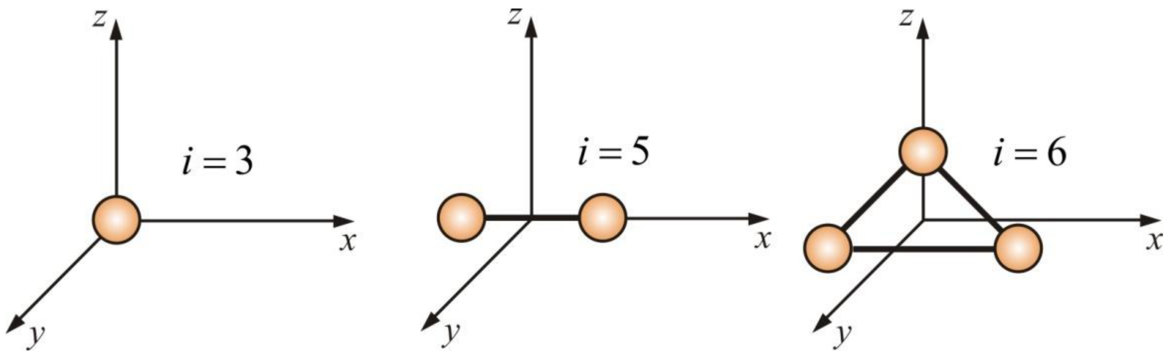


Рис. 3.4.2. Число степеней свободы одно-, двух- и трехатомных молекул

Таким образом, у двухатомных молекул пять степеней свободы (i = 5), а у трехатомных – шесть степеней свободы (i = 6).

Итак, если частица идеального газа простая, то она имеет лишь три степени свободы поступательного движения. Ее энергия равна $3kT/2$. Если же частица идеального газа сложная, то она обладает большим числом степеней свободы и, следовательно, большей энергией.

Например, если сложная частица состоит из двух точечных частиц, то имеются две возможности. Если две частицы между собой жестко связаны и ведут себя подобно твердой гантели, то сложная частица имеет пять степеней свободы: три поступательные и две вращательные. В этом случае энергия частицы равна $5kT/2$. Если же наряду с этим связь между частицами не жесткая и они могут совершать колебательное движение вдоль соединяющей их линии, то добавляются кинетическая энергия $kT/2$ и потенциальная энергия $kT/2$ колебаний, т. е. еще две степени свободы. Всего при этом на одну сложную частицу приходится энергия

$$U = < E_{\text{пост}} > + < E_{\text{вращ}} > + < E_{\text{колеб}} > = \frac{7}{2}kT.$$

Л. Больцман доказал, что ***средняя энергия, приходящаяся на каждую степень свободы, равна*** $kT/2$.

Если частица имеет i степеней свободы, то ее энергия $U = \frac{i}{2}kT$.

Это выражение называется ***теоремой о равномерном распределении средней энергии по степеням свободы.***

В моле имеется $N_А$ частиц, и, следовательно, внутренняя энергия моля идеального газа равна:

$$U = \frac{i}{2}N_A kT = \frac{i}{2}RT.$$

Таким образом, если система находится в состоянии термодинамического равновесия, при температуре T, то средняя кинетическая энергия равномерно распределена между всеми степенями свободы. На каждую поступательную $i_{\text{п}}$ и вращательную $i_{\text{вр}}$ степени свободы приходится энергия $kT/2$. Для колебательной $i_{\text{кол}}$ степени свободы она равна kT. Общее число степеней свободы $i = i_{\text{п}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{кол}}$.

3.4.4. Теплоемкость одноатомных и многоатомных газов

Исходя из определения внутренней энергии (п. 3.4.1) для ***теплоемкости одноатомных газов,*** можно записать:

$$C_V = \frac{dU}{dT} = \frac{3}{2}R = 12{,}5 \ \frac{\text{кДж}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}}.$$

Из этого выражения видно, что (при постоянном объеме) теплоемкость C_V – величина постоянная, от температуры не зависит.

Теплоемкость при постоянном давлении для одноатомных газов:

$$C_P = \frac{3}{2}R + R,$$

или $$C_P = \frac{5}{2} R = 20{,}8\ \frac{\text{кДж}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}}.$$

Полезно знать соотношение $C_P / C_V = \gamma$, где γ – ***показатель адиабаты***, $\gamma = \frac{20{,}8}{12{,}5} = 1{,}67.$

Кроме того, $\gamma = \frac{i+2}{i}$, тогда $C_V = \frac{i}{2} R$ и $C_P = \frac{i+2}{2} R$.

Используя показатель адиабаты γ, можно записать: $C_V = \frac{R}{\gamma - 1}$, тогда внутреннюю энергию можно найти по формулам:

$$U = \frac{m}{\mu} C_V T = \frac{m}{\mu} \frac{R}{\gamma - 1} T \text{ или } U = \frac{PV}{\gamma - 1}.$$

Теоретический расчет теплоемкости для двухатомных газов (i = 5):

$$C_V = \frac{5}{2} R = 20{,}8\ \text{Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К});$$

$$C_P = \frac{7}{2} R = 29{,}1\ \text{Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К});$$

$$\gamma = 7/5 = 1{,}4.$$

Многоатомные газы (i = 6):

$$C_V = 4R = 33{,}24\ \text{Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К});$$

$$C_P = 3R = 24{,}93\ \text{Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К});$$

$$\gamma = 4/3 = 1{,}33.$$

Экспериментальные данные для различных газов неплохо совпадают с теоретическими расчетами, однако только в определенном диапазоне температур.

То, что $C_V = \frac{3}{2} R = 12{,}5 \frac{\text{кДж}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}}$, хорошо подтверждается на опыте с Ne, He, Ar, Kr, парами одноатомных металлов (рис. 3.4.3).

При температурах ниже 100 К (рис. 3.4.3) теплоемкость $C_V \approx 3R/2$, что указывает на отсутствие у молекул как вращательных, так и колебательных степеней свободы.

Далее, с ростом температуры теплоемкость быстро возрастает (*явление «размораживания» степеней свободы молекулы*) до классического значения $C_V = iR/2 = 5R/2$, характерного для двухатомной молекулы с жесткой связью, в которой нет колебательных степеней свободы.

При температурах свыше 2000 К теплоемкость обнаруживает новый скачок до значения $7R/2$. Этот результат свидетельствует о появлении еще и колебательных степеней свободы.

Все это объясняется *специфическими квантовыми эффектами*, необъяснимыми с позиции классической физики.

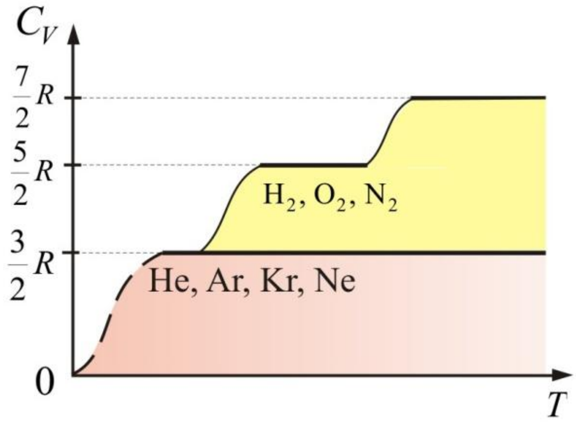


Рис. 3.4.3. Экспериментальная зависимость молярной теплоемкости газов от температуры

3.4.5. Применение первого начала термодинамики к изопроцессам

Применим первое начало термодинамики $\delta Q = \mathrm{d}U + \delta A$ к изопроцессам идеального газа (п. 3.1.4).

Изохорический процесс. *Уравнение процесса* $P/T = \mathrm{const}$.

Так как изохорический процесс протекает при постоянном объеме ($V = \mathrm{const}$), то $\delta A = P\mathrm{d}V = 0$, т. е. в этом процессе газ не совершает работу над внешними телами. Сообщенная газу теплота идет на увеличение внутренней энергии (*первое начало термодинамики*):

$$\delta Q = \mathrm{d}U \,. \qquad (3.4.6)$$

Но $\mathrm{d}U = C_V \mathrm{d}T$, интегрируя данные выражения, получим формулу для расчета *внутренней энергии:*

$$\Delta U = U_2 - U_1 = C_V(T_2 - T_1). \qquad (3.4.7)$$

Используя уравнение Майера и показатель адиабаты $\gamma = C_P/C_V$, для внутренней энергии получим:

$$\Delta U = \frac{V}{\gamma - 1}\left(P_2 - P_1\right).$$

Теплоемкость $C_V = \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} = \dfrac{i}{2}R$, или $C_V = \dfrac{m}{\mu}\dfrac{R}{(\gamma - 1)}$.

Аналогичным образом применим первое начало термодинамики к остальным изопроцессам.

В табл. 3.4.1 приведены сводные данные о характеристиках изопроцессов в газах.

Таблица 3.4.1

	Название процесса			
	Изохорический	Изобарический	Изотермический	Адиабатический
Условие протекания процесса	$V = \text{const}$	$P = \text{const}$	$T = \text{const}$	$\delta Q = 0$; $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{i+2}{i}$
Связь между параметрами состояния	$\frac{P}{T} = \text{const}$	$\frac{V}{T} = \text{const}$; $P\mathrm{d}V = \frac{m}{\mu} R\mathrm{d}T$	$PV = \text{const}$	$PV^{\gamma} = \text{const}$; $TV^{\gamma-1} = \text{const}$; $T^{\gamma}P^{\gamma-1} = \text{const}$
Первое начало	$\delta Q = \mathrm{d}U$	$\delta Q = \mathrm{d}U + \delta A$	$\delta Q = \delta A$	$\mathrm{d}U = \delta A$
Работа в процессе	$\delta A = 0$; $A = 0$	$\delta A = P\mathrm{d}V$; $A = P(V_2 - V_1)$; $A = \frac{m}{\mu} R\Delta T$	$\delta A = P\mathrm{d}V$; $A = \int_{V_1}^{V_2} P\mathrm{d}V$; $A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}$; $A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{P_2}{P_1}$	$\delta A = P\mathrm{d}V = -\mathrm{d}V$; $\delta A = -\frac{m}{\mu}\frac{i}{2} R\mathrm{d}T$; $A = -\Delta U =$ $= -C_V(T_2 - T_1)$; $A = \frac{P_1V_1}{\gamma - 1} \times$ $\times \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]$
Количество теплоты, сообщенное в процессе	$\delta Q = C_V \mathrm{d}T$; $Q = C_V \times$ $\times (T_2 - T_1)$	$\delta Q = C_P \mathrm{d}T$; $Q = C_P(T_2 - T_1)$; $Q = \frac{m}{\mu} R\Delta T\left(\frac{i}{2} + 1\right)$	$\delta Q = \delta A$; $Q = A$	$\delta Q = 0$; $Q = 0$
Изменение внутренней энергии	$\mathrm{d}U = \delta Q$; $\Delta U = \frac{V}{\gamma - 1} \times$ $\times (P_2 - P_1)$	$\mathrm{d}U = C_V \mathrm{d}T$; $\Delta U = C_V(T_2 - T_1)$; $\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu} R\Delta T$	$\mathrm{d}U = 0$; $U = 0$	$\mathrm{d}U = -\delta A = C_V \mathrm{d}T$; $U = A =$ $= C_V(T_2 - T_1)$; $\Delta U = \frac{P_1V_1}{T_1(\gamma - 1)}$
Теплоемкость	$C_V = \frac{m}{\mu}\frac{R}{(\gamma - 1)}$; $C_V = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} = \frac{i}{2} R$	$C_P = \frac{m}{\mu}\frac{\gamma R}{(\gamma - 1)}$; $C_P = \frac{m}{\mu}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}$	$C_T = \pm\infty$	$C_{\text{ад}} = 0$

Здесь уместно рассмотреть еще и ***политропический процесс*** – *такой процесс, при котором изменяются все основные параметры системы, кроме теплоемкости,* т. е. C = const.

Уравнение политропы – $PV^n = \text{const}$ или $TV^{n-1} = \text{const}$.
Здесь n – *показатель политропы.* С помощью этого показателя можно легко описать любой изопроцесс.

1. Изобарический процесс: P = const, n = 0: $C = \dfrac{\gamma R}{\gamma - 1} = \gamma C_V = C_P$.

2. Изотермический процесс: T = const, n = 1, $C_T = \pm\infty$.

3. Изохорический процесс: V = const, $n = \pm\infty$: $C_V = \dfrac{R}{\gamma - 1}$.

4. Адиабатический процесс: ΔQ = 0, $n = \gamma$, $C_{ад}$ = 0.

Во всех этих процессах работа $A = \dfrac{P_1 V_1}{n-1}\left[1 - \left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{n-1}\right]$.

Контрольные вопросы. Упражнения

1. Каков физический смысл первого начала термодинамики?
2. Возможен ли процесс, при котором теплота, взятая от нагревателя, полностью преобразуется в работу?
3. Что такое теплоемкость газа? Какая из теплоемкостей – C_V *или* C_p – больше и почему?
4. Как объяснить температурную зависимость молярной теплоемкости водорода?
5. Что такое внутренняя энергия идеального газа? В результате каких процессов может изменяться внутренняя энергия системы?
6. Приведите уравнение Майера. В чем физический смысл универсальной газовой постоянной?
7. Каковы теплоемкости одноатомных и многоатомных газов?
8. Что такое показатель адиабаты?
9. Что называется числом степеней свободы молекулы?
10. В чем суть закона Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы молекул?
11. Почему колебательная степень свободы обладает вдвое большей энергией, чем поступательная и вращательная?
12. Чему равна работа изобарного расширения 1 моль идеального газа при нагревании на 1 К?
13. Нагревается или охлаждается идеальный газ, если он расширяется при постоянном давлении?

14. Температура газа в цилиндре постоянна. Запишите на основе первого начала термодинамики соотношение между сообщенным количеством теплоты и совершенной работой.

15. Газ переходит из одного и того же начального состояния *1* в одно и то же конечное состояния *2* в результате следующих процессов: а) изотермического; б) изобарного; в) изохорного. Рассмотрев эти процессы графически, покажите: 1) в каком процессе работа расширения максимальна; 2) когда газу сообщается максимальное количество теплоты?

16. Газ переходит из одного и того же начального состояния *1* в одно и то же конечное состояние *2* в результате следующих процессов: а) изобарного процесса; б) последовательных изохорного и изотермического процессов. Рассмотрите эти переходы графически. Одинаковы или различны в обоих случаях: 1) изменение внутренней энергии; 2) затраченное количество теплоты?

17. Почему адиабата более крутая, чем изотерма?

18. Как изменится температура газа при его адиабатном сжатии?

19. Что такое политропический процесс?

20. Показатель политропы n > 1. Нагревается или охлаждается идеальный газ при сжатии?

21. Найдите удельную теплоемкость гелия, водорода и азота при постоянном объеме.

22. Вычислите теоретический выигрыш в КПД при увеличении степени сжатия бензинового двигателя от 6 до 8.

3.5. Круговые процессы. Тепловые машины

3.5.1. Круговые обратимые и необратимые процессы

Прежде чем переходить к изложению второго закона термодинамики, рассмотрим круговые процессы. ***Круговым процессом***, или циклом, называется такой процесс, в результате которого термодинамическое тело возвращается в исходное состояние. *В диаграммах состояния P, V и других круговые процессы изображаются в виде замкнутых кривых* (рис. 3.5.1).

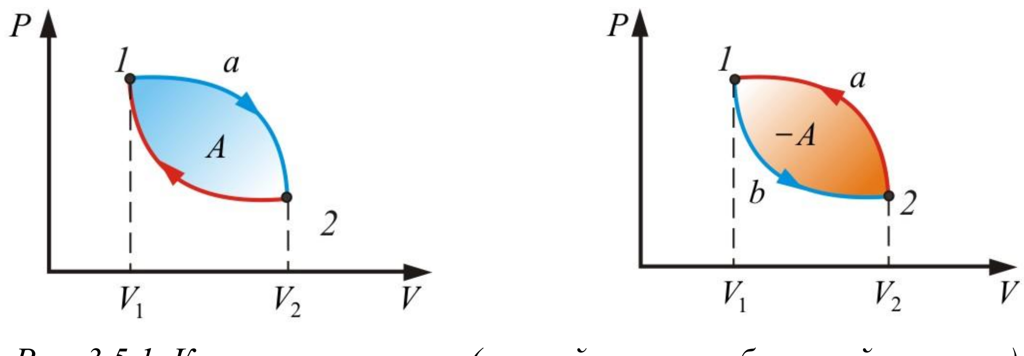


Рис. 3.5.1. Круговые процессы (прямой – слева; обратный – справа)

Цикл, совершаемый идеальным газом, можно разбить на процессы ***расширения*** (*1–2*) и ***сжатия*** (*2–1*) *газа*. Работа расширения (определяется площадью фигуры *1a2*V_2V_1*1*) положительна ($dV > 0$), работа сжатия (определяется площадью фигуры *2b1*V_1V_2*2*) отрицательна ($dV < 0$). Следовательно, **работа**, совершаемая за цикл, определяется площадью, охваченной замкнутой кривой. *Если за цикл совершается положительная работа:*

$$A = \oint P\mathrm{d}V > 0 \tag{3.5.1}$$

(цикл протекает по часовой стрелке), рис. 3.5.1, то он называется ***прямым***. Если за цикл совершается отрицательная работа:

$$A = \oint P\mathrm{d}V < 0 \tag{3.5.2}$$

(цикл протекает против часовой стрелки), то он называется ***обратным***.

Круговые процессы лежат в основе всех тепловых машин: двигателей внутреннего сгорания, паровых и газовых турбин, паровых и холодильных машин и т. д.

В результате кругового процесса система возвращается в исходное состояние, и, следовательно, полное изменение внутренней энергии газа равно нулю. Поэтому первое начало термодинамики для кругового процесса:

$$Q = \Delta U + A = A, \tag{3.5.3}$$

т. е. работа, совершаемая за цикл, равна количеству полученной извне теплоты. Однако в результате кругового процесса система может теплоту как получать, так и отдавать, поэтому

$$Q = Q_1 - Q_2, \tag{3.5.4}$$

где Q_1 – количество теплоты, полученное системой; Q_2 – количество теплоты, отданное системой. Поэтому термический коэффициент полезного действия для кругового процесса

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \tag{3.5.5}$$

Все термодинамические процессы, в т. ч. и круговые, делят на две группы: обратимые и необратимые.

Процесс называют обратимым, *если он протекает таким образом, что после окончания процесса он может быть проведен в* ***обратном направлении*** *через все те же промежуточные состояния, что и прямой процесс*. После проведения кругового обратимого процесса никаких изменений в среде, окружающей систему, не произойдет.

Процесс называется необратимым*, если он протекает так, что после его окончания систему нельзя вернуть в начальное состояние че-*

рез прежние промежуточные состояния. Нельзя осуществить необратимый круговой процесс, чтобы нигде в окружающей среде не осталось никаких изменений.

Максимальным КПД обладают машины, у которых только обратимые процессы.

Реальные процессы сопровождаются диссипацией энергии (*из-за трения*, *теплопроводности и т. д.*), *которая нами не рассматривается*. Обратимые процессы – *это в какой-то степени идеализация реальных процессов. Их рассмотрение важно по двум причинам:*

- *многие процессы в природе и технике практически обратимы*;
- *обратимые процессы являются наиболее экономичными и приводят к максимальному значению коэффициента полезного действия.*

3.5.2. Тепловые машины

Тепловой машиной *называется периодический действующий двигатель, совершающий работу за счет получаемого извне тепла.*

Любая тепловая машина работает по принципу кругового (циклического) процесса, т. е. возвращается в исходное состояние (рис. 3.5.1). Но чтобы при этом была совершена полезная работа, возврат должен быть произведен с наименьшими затратами. Полезная работа равна разности работ расширения и сжатия, т. е. равна площади, ограниченной замкнутой кривой.

Обязательными частями тепловой машины являются нагреватель (источник энергии), холодильник, рабочее тело (газ, пар).

Прямой цикл используется в *тепловом двигателе* – периодически действующей тепловой машине, совершающей работу за счет полученной извне теплоты. Рассмотрим схему теплового двигателя (рис. 3.5.2). От термостата с более высокой температурой T_1, называемого нагревателем, за цикл отнимается количество теплоты Q_1, а термостату с более низкой температурой T_2, называемому холодильником, за цикл передается количество теплоты Q_2 и совершается работа A:

$$A = Q_1 - Q_2. \tag{3.5.6}$$

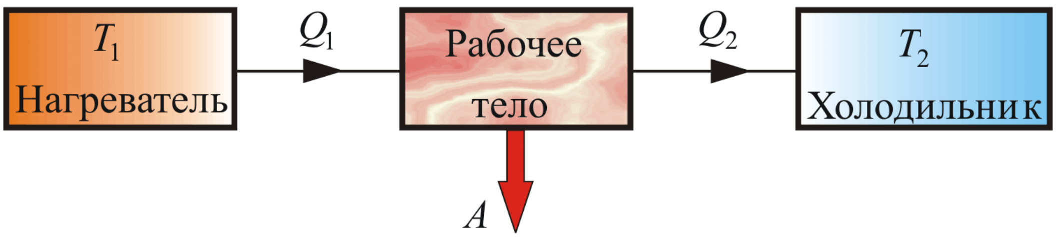


Рис. 3.5.2. Тепловая машина

Обратный цикл используется в ***холодильных машинах*** – *периодически действующих установках, в которых за счет работы внешних сил теплота переносится к телу с более высокой температурой*. Принцип действия холодильной машины представлен на рис. 3.5.3.

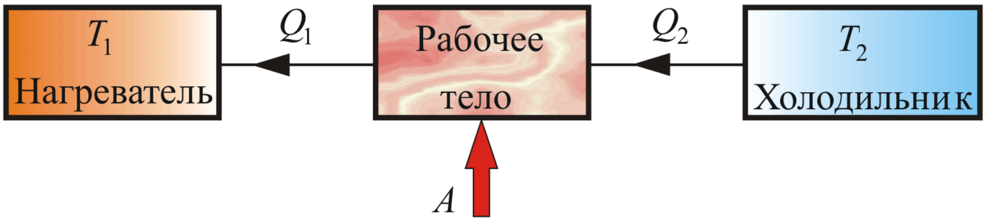


Рис. 3.5.3. Холодильная машина

Системой за цикл поглощается при низкой температуре T_2 количество теплоты Q_2 и отдается при более высокой температуре T_1 количество теплоты Q_1 ***за счет работы внешних сил А***.

3.5.3. Цикл Карно

Основываясь на втором начале термодинамики, французский физик С. Карно в 1824 г. вывел теорему, носящую его имя.

Из всех периодически действующих тепловых машин, имеющих одинаковые температуры нагревателей и холодильников, наибольшим КПД обладают обратимые машины. Причем КПД обратимых машин, работающих при одинаковых температурах нагревателей и холодильников, равны друг другу и не зависят от конструкции машины и от природы рабочего вещества. При этом КПД меньше единицы.

Цикл, изученный Карно, является самым экономичным и представляет собой круговой процесс, состоящий из двух изотерм и двух адиабат (рис. 3.5.4).

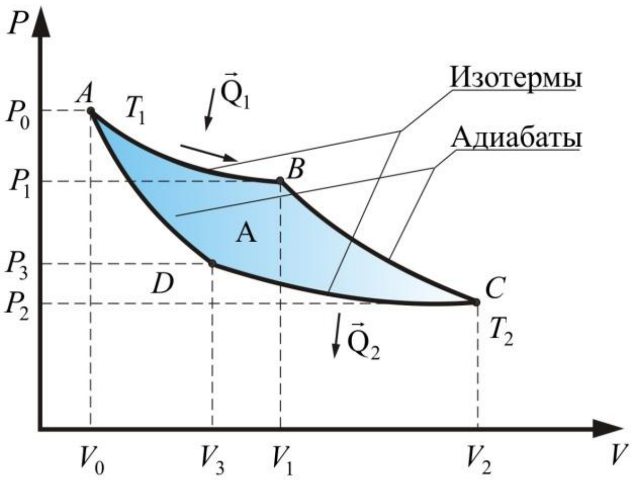


Рис. 3.5.4. Цикл Карно

В рассматриваемом цикле в качестве рабочего тела используется идеальный газ, заключенный в сосуд с подвижным поршнем (рис. 3.5.5). Определим его работу и КПД.

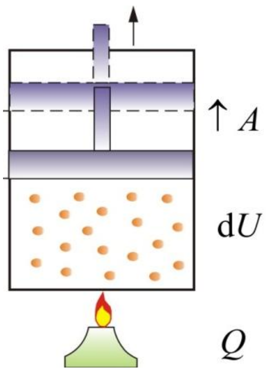


Рис. 3.5.5. Цилиндр с подвижным поршнем

Начнем рассмотрение процесса из т. A (рис. 3.5.4). Газ сжат до давления P_0 и находится в контакте с нагревателем при T_1. *Из первого начала следует, что* $\delta Q = \mathrm{d}U + \delta A$. В изотермическом процессе $\mathrm{d}U = 0$; значит, все тепло перейдет в работу: $\delta Q = \delta A$.

Итак, на участке ***A–B* – *изотермическое расширение*** *при температуре* T_1. Тепло, полученное от нагревателя Q_1, идет на совершение работы A_1:

$$A_1 = \frac{m}{\mu} R T_1 \ln \frac{V_1}{V_2} = Q_1.$$

Полученное рабочим телом тепло нужно передать холодильнику. Но нужно сначала рабочее тело охладить до T_2 (а охлаждать без затрат тепла – это ***адиабатическое расширение***; участок ***B–C***), а затем уже присоединять к холодильнику. *Адиабатическим* расширением заканчивается первая половина цикла – *совершение полезной работы*:

$$A_2 = \frac{R}{\gamma - 1}(T_1 - T_2).$$

Теперь необходимо вернуть рабочее тело в исходное состояние, т. е. сжать газ до P_0. Контакт с нагревателем опять не следует делать, пока рабочее тело не примет температуру нагревателя (T_1).

Возвращение в т. A опять происходит в два этапа: сначала рабочее тело сжимают, не прерывая контакта с холодильником, при этом холодильнику отдается тепло Q_2 (***изотермическое сжатие C–D***). На этом этапе *работа совершается над газом*, она отрицательна:

$$A_3 = -\frac{m}{\mu} R T_2 \ln \frac{V_2}{V_1} = -Q_2.$$

Затем тело изолируют от холодильника, *адиабатно* сжимают его, при этом температура его повышается до T_1 (***D–A***). Рабочее тело при ***адиабатическом сжатии*** нагревается за счет внешней работы, совершаемой над ним:

$$A_4 = -\frac{R}{\gamma - 1}(T_1 - T_2).$$

Общая работа цикла $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$;

$$A = Q_1 - Q_2 = R(T_1 - T_2)\ln V_2 / V_1 > 0.$$

Значит, работа, совершаемая газом, больше работы внешних сил.

Работа равна площади ограниченной кривой *ABCDA* (рис. 3.5.4).

Полезная работа $A = Q_1 - Q_2$.

КПД процесса $$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (3.5.7)$$

Видно, что $\eta < 1$ и *зависит от разности температур между нагревателем и холодильником* (*и не зависит от конструкции машины и рода рабочего тела*). *Это еще одна формулировка **теоремы Карно**.*

Цикл Карно, рассмотренный нами, был на всех стадиях проведен так, что не было необратимых процессов. Здесь самый большой КПД. Больше получить невозможно.

3.5.4. Циклы Отто, Дизеля и Стирлинга

Цикл Отто. По-разному комбинируя процессы – изотермический, изобарический, адиабатический и другие процессы – можно получить различные циклы, по которым работают современные тепловые двигатели. Два адиабатических и два изохорических процесса на рис. 3.5.6 образуют цикл Отто бензинового двигателя.

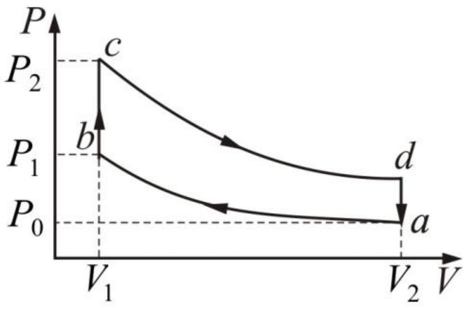


Рис. 3.5.6. Цикл Отто четырехтактного бензинового двигателя с искровым воспламенением

Цикл назван в честь немецкого инженера Н. Отто, построившего в 1876 г. такой двигатель.

КПД цикла Отто $\eta_O = \frac{T_c - T_d}{T_c}$ меньше КПД цикла Карно $\eta = \frac{T_c - T_a}{T_c}$.

КПД цикла Отто можно выразить через отношение объемов:

$$\eta_O = 1 - \frac{1}{(V_2/V_1)^{\gamma-1}}.$$

Величина V_2/V_1 называется *сжатием горючей смеси*.

Цикл Дизеля. В 1897 г. немецкий инженер Р. Дизель изобрел двигатель, основанный на цикле «*сжатие – самопроизвольное воспламенение*». Если на диаграмме (рис. 3.5.6) заменить изохорический процесс bc, по которому идет нагрев топливной смеси, изобарическим, то получим цикл Дизеля.

Цикл Стирлинга. В настоящее время ведущие мировые автомобильные компании совершенствуют двигатель «*внешнего сгорания*», основанный на цикле, предложенном в 1816 г. Р. Стирлингом. Если на диаграмме (рис. 3.5.6) заменить адиабаты cd и ab изотермами, то мы получим цикл Стирлинга. КПД цикла совпадает с КПД цикла Карно.

Двигатель внешнего сгорания (рис. 3.5.7) имеет и еще *ряд преимуществ*. Сгорание смеси происходит непрерывно, а не вспышками. Его можно использовать без глушителя. Выбросы продуктов сгорания значительно меньше, чем в других двигателях. Кроме того, двигатель Стирлинга работает не только за счет сжигания топлива, но и от любого источника тепла, например солнечных лучей. Его можно использовать и в авиации, и в космосе (рис. 3.5.8).

Рис. 3.5.7. Двигатель внешнего сгорания (двигатель Стирлинга)

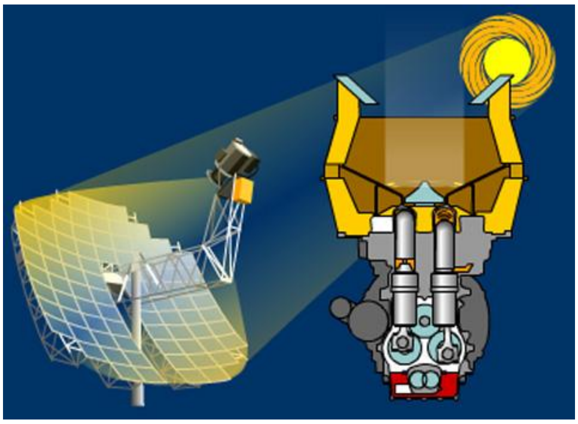


Рис. 3.5.8. Двигатель Стирлинга, работающий от солнечной энергии

Контрольные вопросы. Упражнения

1. Что назвается круговым процессом (циклом)?
2. Проанализируйте прямой и обратный циклы.
3. Чем отличаются обратимые и необратимые процессы? Почему все реальные процессы необратимы?
4. Дайте понятие тепловой машины, чем отличается тепловой двигатель от холодильной машины?
5. Для чего необходим холодильник тепловой машине?
6. Возможен ли процесс, при котором теплота, взятая от нагревателя, полностью преобразуется в работу?
7. Сформулируйте теорему Карно.
8. Проанализируйте P, V диаграмму цикла Карно.
9. Представив цикл Карно на диаграмме P, V графически, укажите, какой площадью определяется: 1) работа, совершенная над газом; 2) работа, совершенная самим расширяющимся газом.
10. Как вычисляется работа и КПД цикла Карно?
11. Чем определяется КПД цикла Карно? Какие машины обладают максимальным КПД?
12. Кроме холодильных машин, обратный цикл Карно положен в основу действия тепловых насосов. Поясните как это происходит?
13. Холодильник Карно предназначен для хранения газообразного гелия до температуры 4 К. Сколько джоулей механической энергии требуется для того, чтобы изъять 1 Дж тепла из гелия, находящегося при этой температуре? (Температура горячего резервуара комнатная).
14. Решите предыдущее упражнение для случая, когда температура образца гелия не 4 К, а 0,1 К.
15. Холодильник, основанный на цикле Карно (рис. 5.4), извлекает из охлаждаемого тела 140 Дж тепла. Это тепло передается теплообменнику, имеющему температуру 27 °С. Среднюю температуру тела в процессе охлаждения можно считать равной 7 °С. Сколько работы в джоулях нужно затратить на этот процесс?
16. Докажите, что, если в приведенном на рис. 3.5.4 цикле Карно в качестве рабочего вещества используется идеальный газ, то КПД $\eta = 1 - \left(\frac{V_b}{V_c}\right)^{\gamma - 1}$. Покажите, что КПД цикла Отто на рис. 3.5.6. равен $\eta = 1 - T_b/T_c$.

3.6. Энтропия. Второе и третье начала термодинамики

3.6.1. Приведенная теплота. Энтропия

Отношение теплоты Q в изотермическом процессе к температуре, при которой происходила передача теплоты, называется ***приведенной теплотой*** Q':

$$Q' = Q/T. \tag{3.6.1}$$

Тогда для процесса, происходящего по замкнутому циклу,

$$\oint \frac{\delta Q_{\text{обр}}}{T} = 0. \tag{3.6.2}$$

Из равенства нулю интеграла, взятого по замкнутому контуру, следует, что подынтегральное выражение $\delta Q/T$ есть ***полный дифференциал*** некоторой функции, которая определяется только состоянием системы и не зависит от пути, каким система пришла в это состояние. Это позволяет ввести новую функцию состояния S:

$$\mathrm{d}S = \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{\text{обр}}. \tag{3.6.3}$$

Функция состояния, полный дифференциал которой равен $\delta Q/T$, называется ***энтропией*** (от греч. *entropia* – поворот, превращение) – мера способности теплоты превращаться в другие виды энергии.

Энтропия *S – это отношение полученной или отданной теплоты к температуре, при которой происходил этот процесс*: $S = \int \frac{\mathrm{d}Q}{T}$.

Понятие энтропии впервые введено Р. Клаузиусом в 1854 г.

Для *обратимых процессов изменение энтропии*, как следует из (3.6.2),

$$\Delta S_{\text{обр}} = 0, \text{ т. к. } \oint \frac{\delta Q_{\text{обр}}}{T} = 0. \tag{3.6.4}$$

Это выражение называется ***равенство Клаузиуса***.

Рассмотрим *изменение энтропии в необратимом цикле*.

Известно, что КПД $\eta_{\text{обр}} > \eta_{\text{необр}}$, т. е.

$$1 - Q_2/Q_1 < 1 - T_2/T_1.$$

Отсюда $\left|\frac{Q_2}{T_2}\right| > \left|\frac{Q_1}{T_1}\right|$, тогда

$$\Delta S_{\text{необр}} = \Delta S_{\text{нагр}} + \Delta S_{\text{хол}} = \frac{-Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} > 0.$$

Таким образом,

$$\Delta S_{\text{необр}} > 0, \text{ или } \oint \frac{\delta Q}{T} > 0. \qquad (3.6.5)$$

Это выражение называют ***неравенством Клаузиуса***: *при любом необратимом процессе в замкнутой системе* ***энтропия возрастает*** ($\mathrm{d}S > 0$).

Примечание. На основании этих рассуждений Р. Клаузиус выдвинул ***гипотезу о тепловой смерти вселенной*** – ошибочный вывод о том, что все виды энергии во Вселенной в конце концов должны перейти в энергию теплового движения, которая равномерно распределится по веществу Вселенной, после чего в ней прекратятся все макроскопические процессы. Однако Больцман, а впоследствии и российские физики Зельдович и Новиков опровергли эту гипотезу.

3.6.2. Изменение энтропии в изопроцессах и в фазовых переходах

Энтропия системы является функцией ее состояния, определенная с точностью до произвольной постоянной.

Если система совершает равновесный переход из одного состояния в другое, то изменение энтропии

$$\Delta S_{1\to 2} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}U + \delta A}{T}. \qquad (3.6.6)$$

Таким образом, по формуле (3.6.6) можно определить энтропию лишь с точностью до произвольной постоянной, т. е. *начало энтропии произвольно.* Физический смысл имеет лишь ***разность энтропий***.

- *Изохорический процесс:* $\Delta S = \frac{m}{\mu} C_V \ln \frac{T_2}{T_1}$, т. к. $V_1 = V_2$.
- *Изобарический процесс*: $\Delta S = \frac{m}{\mu} \int_{T_1}^{T_2} C_P \frac{\mathrm{d}T_2}{T_1} = \frac{m}{\mu} C_P \ln \frac{T_2}{T_1}$, т. к. $P_1 = P_2$.
- *Изотермический процесс*: $\Delta S = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1}$, т. к. $T_1 = T_2$.
- *Адиабатический процесс*: $\Delta S = 0$, т. к. $\delta Q = 0$.

Отметим, что в последнем случае адиабатический процесс называют *изоэнтропийным процессом*, т. к. $S = \text{const}$.

3.6.3. Поведение энтропии в процессах изменения агрегатного состояния

Рассмотрим три агрегатных состояния: *твердое, жидкое* и *газообразное* и два перехода к ним (рис. 3.6.1).

Рис. 3.6.1. Схема возможных изменений агрегатного состояния вещества

Фазовый переход «твердое тело–жидкость»

Закон плавления и конденсации можно записать так: $\delta Q = \pm\lambda \mathrm{d}m$.

Проследим за поведением энтропии при этом фазовом переходе:

$$\Delta S = \pm\lambda m / T_{\text{пл}} . \qquad (3.6.7)$$

Из этой формулы следует, ***что при плавлении энтропия возрастает, а при кристаллизации – уменьшается***.

Физический смысл этого результата достаточно ясен: фазовая область молекулы в твердом теле гораздо меньше, чем в жидкости, т. к. в твердом теле каждой молекуле доступна только малая область пространства между соседними узлами кристаллической решетки, а в жидкости молекулы занимают всю область пространства. Поэтому при равной температуре энтропия твердого тела меньше энтропии жидкости. Это означает, что твердое тело представляет собой более упорядоченную и менее хаотичную систему, чем жидкость.

Фазовый переход «жидкость–газ»

Закон испарения и конденсации можно записать в общем виде:

$$\delta Q = \pm r \mathrm{d}m, \qquad (3.6.8)$$

где знак плюс относится к испарению, а знак минус – к конденсации:

$$\Delta S = \pm r m / T_{\text{к}} . \qquad (3.6.9)$$

Из формулы (3.6.9) следует, ***что при испарении энтропия возрастает, а при конденсации – уменьшается.***

Физический смысл этого результата состоит в различии фазовой области молекулы в жидкости и газе. Хотя в жидкости и газе каждой молекуле доступна вся область пространства, занятая системой, но сама эта область для жидкости существенно меньше, чем для газа. В жидкости силы притяжения между молекулами удерживают их на определенном расстоянии друг от друга. Поэтому каждая молекула хотя и имеет возможность свободно мигрировать по области пространства, занятой жидкостью, но не имеет возможности «оторваться от коллектива» остальных молекул – стоит ей оторваться от одной молекулы, как тут же притягивается другая. Поэтому объем жидкости зависит от ее количества и никак не связан с объемом сосуда.

Молекулы газа ведут себя иначе: у них гораздо больше свободы. Среднее расстояние между ними таково, что силы притяжения очень малы и молекулы «замечают друг друга» лишь при столкновениях. В результате газ всегда занимает весь объем сосуда.

Поэтому при равных температурах фазовая область молекул газа значительно больше фазовой области молекул жидкости и энтропия газа больше энтропии жидкости. Газ, по сравнению с жидкостью, гораздо менее упорядоченная, более хаотичная система.

3.6.4. Второе начало термодинамики

Термодинамика – это наука о тепловых процессах, о превращении тепловой энергии. Для описания термодинамических процессов первого начала термодинамики недостаточно. Выражая общий закон сохранения и превращения энергии, первое начало не позволяет определить направление протекания процессов.

Второе начало термодинамики является фундаментальным законом природы. Он охватывает многочисленные явления окружающего мира и имеет глубокие практические и философские последствия. Второе начало устанавливает существование у всякой равновесной системы *однозначной функции – энтропии*, которая не изменяется при равновесных процессах и всегда возрастает при неравновесных.

В 1824 г. Карно доказал, что для работы теплового двигателя необходимо не менее двух источников теплоты с различными температурами. *Невозможность создания вечного двигателя второго рода подтверждается вторым началом термодинамики.*

Приведем некоторые *формулировки второго начала термодинамики*:

- Невозможен процесс, единственным результатом которого является превращение всей теплоты, полученной от нагревателя, в эквивалентную ей работу (формулировка Кельвина).
- Невозможен вечный двигатель второго рода (Томсон–Планк).
- Невозможен процесс, единственным результатом которого является передача энергии в форме теплоты от холодного тела к горячему (формулировка Клаузиуса).
- Энтропия замкнутой системы не может убывать, $\mathrm{d}S \geq 0$.

Последнее выражение является математической записью **второго начала термодинамики**. Его можно записать в объединенном виде:

$$TdS \geq \delta Q. \qquad (3.6.10)$$

Энтропия замкнутой системы при любых происходивших в ней процессах не может убывать (или увеличивается, или остается неизменной).

Первое и второе начала термодинамики в объединенной форме имеют вид:

$$TdS \geq dU + \delta A. \qquad (3.6.11)$$

3.6.5. Термодинамические потенциалы. Свободная и связанная энергии

Из термодинамического тождества вытекает существование термодинамических потенциалов системы, которые являются полными дифференциалами и которые определяют термодинамические свойства системы. В соответствии с этим энтропия S и внутренняя энергия U являются термодинамическими потенциалами. В качестве других потенциалом выступают энтальпия H (определяет состояние системы при постоянных значениях S и P); свободная энергия F (определяет состояние системы при постоянных T и V); потенциал Гиббса Φ (определяет состояние системы при постоянных T и P).

Связь между термодинамическими потенциалами и их производными определяется следующими соотношениями:

$$U = H - PV = H + V\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S;$$

$$H = U + PV = U + P\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_S;$$

$$F = U - TS = U + T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V;$$

$$\Phi = H - TS = U + PV - TS = H + T\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_P.$$

Как следует из (3.6.11), в обратимом процессе

$$\delta A = -(dU - TdS), \text{ или } \delta A = -d(U - TS) - SdT.$$

Пусть $U - TS = F$, где F – разность двух функций состояний, поэтому сама является также функцией состояния. Ее назвали ***свободной энергией***. Тогда

$$\delta A = -(dF + SdT). \qquad (3.6.12)$$

В обратимом изотермическом процессе $\mathrm{d}T = 0$ имеем:

$$\delta A = -\mathrm{d}F = -\int_1^2 \mathrm{d}F = -\left(F_2 - F_1\right) = F_2 - F_1,$$

т. е. $A_{\text{изот}} = F_1 - F_2$. Следовательно, ***свободная энергия*** есть та работа, которую могло бы совершить тело в обратимом изотермическом процессе, или свободная энергия есть максимальная возможная работа, которую может совершить система, обладая каким-то запасом внутренней энергии.

Внутренняя энергия системы U равна сумме ***свободной*** (F) и ***связанной*** (TS) энергии:

$$U = F + TS. \tag{3.6.13}$$

Связанная энергия *– та часть внутренней энергии, которая не может быть превращена в работу,* – это обесцененная часть внутренней энергии.

Таким образом, *энтропия системы есть мера обесцененности ее энергии* (мера той энергии, которая не может быть превращена в работу).

В термодинамике есть еще понятие ***энергетическая потеря*** в изолированной системе:

$$\Pi = T_{\min}\Delta S, \tag{3.6.14}$$

где $T_{\min}$ – температура окружающей среды.

При любом необратимом процессе энтропия увеличивается до того, пока не прекратятся какие-либо процессы, т. е. пока не станет $F = 0$. И это произойдет при достижении замкнутой системой равновесного состояния, т. е. когда все параметры состояния системы (P, T) во всех точках системы станут одинаковыми. Вывести систему из этого равновесного состояния можно, только затратив энергию извне.

3.6.6. Статистический смысл энтропии. Третье начало термодинамики

Энтропия – одна из важнейших функций состояния. Она является количественной мерой хаоса и определяется двумя способами. Мы рассмотрели энтропию как функцию макросостояния (*термодинамический способ*). Посмотрим на энтропию с другой стороны (*статистический способ*).

Макросостояние – это состояние вещества, характеризуемое его термодинамическими параметрами.

Состояние же системы, характеризуемое состоянием каждой входящей в систему молекулы, называют микросостоянием.

Так как молекулы движутся хаотически, то имеется много микросостояний, соответствующих одному макросостоянию. Пусть W – число микросостояний, соответствующее данному макросостоянию (как правило, $W >> 1$).

Термодинамической вероятностью, или статистическим весом, макросостояния W *называется число микросостояний, осуществляющих данное макросостояние* (или число перестановок одноименных элементов, при которых сохраняется данное макросостояние).

Термодинамическая вероятность W максимальна, *когда система находится в* равновесном состоянии.

В состоянии равновесия и термодинамическая вероятность максимальна, и энтропия максимальна. *Из этого можно сделать вывод, что между ними существует связь.*

Энтропия *– это функция состояния системы, связанная со* ***статистическим весом*** *формулой*

$$S = k \ln W.$$

С этой точки зрения энтропия выступает как *мера беспорядочности, хаотичности состояния.*

Связь между S и W позволяет несколько иначе сформулировать второе начало термодинамики: ***наиболее вероятным изменением энтропии является ее возрастание.***

Энтропия замкнутой системы максимальна при достижении системой равновесного состояния.

Третье начало термодинамики

Первое и второе начала термодинамики не позволяют определить значение энтропии при абсолютном нуле ($T = 0$ К).

На основании обобщения экспериментальных исследований свойств различных веществ при сверхнизких температурах был установлен закон, устранивший указанный недостаток. Сформулировал его в 1906 г. немецкий физико-химик В. Нернст, и называется он третьим началом термодинамики или теоремой Нернста.

Согласно Нернсту изменение энтропии ΔS стремится к нулю при любых обратимых изотермических процессах, совершаемых между двумя равновесными состояниями при температурах, приближающихся к абсолютному нулю ($\Delta S \to 0$ при $T \to 0$).

Объяснение теоремы Нернста можно дать только на основании квантово-механических представлений.

Третье начало термодинамики можно сформулировать следующим образом: *при абсолютном нуле температуры любые изменения термодинамической системы происходят без изменения энтропии*:

$$\Delta S_{T=0} = 0, \text{ т. е. } S_{T=0} = \text{const или } S_{T=0} = 0. \quad (3.6.15)$$

Принцип Нернста был развит М. Планком, предположившим, что ***при абсолютном нуле температуры энергия системы минимальна.***

Тогда можно считать, что при абсолютном нуле система имеет одно квантовое состояние:

$$S_{T=0}=0; \tag{3.6.16}$$

$$S=k\ln W, \text{ а } W=1,$$

тогда

$$S_{T=0}=k\ln 1=0. \tag{3.6.17}$$

Значит, термодинамическая вероятность W при T = 0 К должна быть равна единице, что недостижимо.

Следствием третьего начала является то, что *невозможно охладить тело до абсолютного нуля* – ***принцип недостижимости абсолютного нуля температуры***. Иначе был бы возможен вечный двигатель II рода.

Контрольные вопросы. Упражнения

1. Дайте понятие приведенной теплоты и энтропии.
2. Дайте определение, размерность и математическое выражение энтропии для различных процессов.
3. Что такое равенство и неравенство Клаузиуса?
4. Как ведет себя энтропия в процессах изменения агрегатного состояния?
5. Как изменяется энтропия при обратимых и необратимых процессах?
6. Приведите известные вам формулировки второго начала термодинамики.
7. Какой двигатель называется двигателем второго рода?
8. Какой вид имеет первое и второе начало термодинамики в объединенной форме?
9. Возможен ли процесс, при котором теплота, взятая от нагревателя, полностью преобразуется в работу?
10. В каком направлении может изменяться энтропия замкнутой системы? Незамкнутой системы?
11. Изобразите в системе координат *T*, *S* изотермический и адиабатный процессы.
12. Представьте графически цикл Карно в переменных *T, S*.
13. Дайте понятие свободной и связанной энергии.
14. Что такое энергетическая потеря в изолированной системе?
15. Каков статистический смысл энтропии?
16. Что такое макросостояние и микросостояние системы?
17. Что такое термодинамическая вероятность или статический вес макросостояния?

18. В каком состоянии энтропия и термодинамическая вероятность максимальны?

19. Какова связь между энтропией и термодинамической вероятностью?

20. Гипотеза Клаузиуса о тепловой смерти вселенной и ее опровержение.

21. Каковы недостатки первого и второго начала термодинамики?

22. Сформулируйте теорему Нернста.

23. Сформулируйте третье начало термодинамики.

24. Каково следствие третьего начала термодинамики?

25. В примере на рисунке будем считать, что имеется 0,5 л H_2 и 1,5 л N_2. Чему будет равно приращение энтропии при смешивании?

3.7. Термодинамические свойства реальных газов

3.7.1. Реальные газы

Как известно, уравнение состояния устанавливает функциональную связь между давлением P, объемом V, температурой T и числом молей ν газа в состоянии равновесия. Самым простым и известным уравнением состояния является уравнение состояния идеального газа

$$PV = \nu RT . \tag{3.7.1}$$

Реальные газы описываются уравнением состояния идеального газа только приближенно, и отклонения от идеального поведения становятся заметными *при высоких давлениях и низких температурах*, особенно когда газ близок к конденсации. Так, для газов с низкой температурой сжижения (He, H_2, Ne и даже N_2, O_2, Ar, CO, CH_4) при давлениях до 50 атм отклонения не превышают 5 %, а при давлениях до 10 атм – 2 %. Легко конденсирующиеся газы (CO_2, SO_2, Cl_2, CH_3Cl) уже при 1 атм обнаруживают отклонения до 3 %.

Предпринималось много попыток для учета отклонений свойств реальных газов от свойств идеального газа путем введения различных поправок в уравнение состояния идеального газа.

Первая поправка в уравнении состояния идеального газа рассматривает собственный объем, занимаемый молекулами реального газа. В *уравнении Дюпре* (1864)

$$P(V - \nu b) = \nu RT$$

постоянная b учитывает собственный мольный объем молекул, $\nu = m/\mu$ – число молей газа.

При понижении температуры межмолекулярное взаимодействие в реальных газах приводит к конденсации (образованию жидкости). Межмолекулярное притяжение эквивалентно существованию в газе некоторого внутреннего давления P' (иногда его называют статическим давлением). Изначально величина P' была учтена в общей форме в *уравнении Гирна* (1865):

$$(P + P')(V - \nu b) = \nu RT.$$

Наибольшее распространение вследствие простоты и физической наглядности получило уравнение голландского физика *Ван-дер-Ваальса.* В 1873 г. он дал функциональную интерпретацию внутреннего давления. Согласно модели Ван-дер-Ваальса силы притяжения между молекулами (*силы Ван-дер-Ваальса*) обратно пропорциональны шестой степени расстояния между ними или второй степени объема, занимаемого газом. Считается также, что силы притяжения суммируются с внешним давлением. С учетом этих соображений уравнение состояния идеального газа преобразуется в ***уравнение Ван-дер-Ваальса***:

$$(V - \nu b)\left(P + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right) = \nu RT. \qquad (3.7.2)$$

Реальные газы *– газы, свойства которых зависят от взаимодействия молекул.* В обычных условиях, когда средняя потенциальная энергия межмолекулярного взаимодействия много меньше средней кинетической энергии молекул, свойства реальных и идеальных газов отличаются незначительно. Поведение этих газов резко различно при высоких давлениях и низких температурах, когда начинают проявляться квантовые эффекты.

3.7.2. Силы межмолекулярного взаимодействия

Ван-дер-Ваальс, объясняя свойства реальных газов и жидкостей, предположил, что на *малых расстояниях между молекулами действуют силы отталкивания, которые с увеличением расстояния сменяются силами притяжения.* Межмолекулярные взаимодействия имеют электрическую природу и складываются из сил притяжения (ориентационных, индукционных) и сил отталкивания.

Ориентационные силы действуют между полярными молекулами – молекулами, обладающими дипольными или квадрупольными моментами. Сила притяжения между молекулами зависит от их взаимной ориентации, поэтому они и называются ориентационными. Хаотическое тепловое движение непрерывно меняет ориентацию полярных молекул, но среднее по всем ориентациям значение силы не равно нулю (рис. 3.7.1).

Среднее значение потенциальной энергии ориентационного межмолекулярного взаимодействия равно $U_{ор}(r) \sim p_1 p_2 r^{-6}$, где p_1, p_2 – дипольные моменты взаимодействующих молекул. Сила ориентационного взаимодействия $F_{ор} = -\partial U/\partial r \sim r^{-7}$ убывает с расстоянием значительно быстрее, чем кулоновская сила взаимодействия заряженных частиц $F_{кул} \sim r^{-2}$.

Рис. 3.7.1. Силы притяжения и отталкивания в связи с ориентацией молекул

Индукционные* (*поляризационные*) *силы действуют между полярной и неполярной молекулами, а также между полярными молекулами. Полярная молекула создает электрическое поле, которое поляризует другую молекулу – индуцирует в ней дипольный момент. Потенциальная энергия межмолекулярного взаимодействия в этом случае пропорциональна дипольному моменту p_1 полярной молекулы и поляризуемости α_2 второй молекулы: $U_{инд} \sim p_1\alpha_2 r^{-6}$. Индукционные силы убывают по тому же закону, что и ориентационные: $F_{инд} \sim r^{-7}$.

Дисперсионное молекулярное взаимодействие возникает благодаря виртуальному нарушению электронейтральности молекулы в отдельные моменты времени. Мгновенный диполь поляризует соседние молекулы – возникает взаимодействие мгновенных диполей. Данное взаимодействие называется дисперсионным, его энергия определяется поляризуемостью молекул α_1, α_2: $U(r) \sim \alpha_1\alpha_2 r^{-6}$, а сила убывает по закону $F_{дисп} \sim r^{-7}$. Обычно дисперсионные силы превосходят ориентационные и индукционные. Например, при взаимодействии таких полярных молекул, как CO, HI, HBr и др., $F_{дисп}$ в десятки и сотни раз превосходит все остальные.

Отметим, что все три силы и энергии одинаковым образом убывают с расстоянием (рис. 3.7.1 и 3.7.2):

$$F = F_{ор} + F_{инд} + F_{дисп} \sim r^{-7};$$
$$U = U_{ор} + U_{инд} + U_{дисп} \sim r^{-6}.$$

Силы отталкивания (рис. 3.7.2) действуют между молекулами на очень малых расстояниях, когда происходит взаимодействие электронных оболочек атомов, входящих в состав молекул. Принцип Паули запрещает проникновение заполненных электронных оболочек друг в друга. Возникающие при этом силы отталкивания зависят в большей степени, чем силы притяжения, от индивидуальных особенностей молекул. К хорошему согласию с данными экспериментов приводит допущение, что потенциальная энергия сил отталкивания возрастает с уменьшением расстояния по закону $U_{\text{от}}(r) \sim r^{-12}$, а, соответственно, сила отталкивания растет как $F_{\text{от}} \sim r^{-13}$. Полагаем, что $U(r = \infty) = 0$, т. е. при больших расстояниях потенциальная энергия взаимодействия равна нулю. В этом случае *кривая взаимодействия описывается потенциалом Леннарда–Джонса* (рис. 3.7.3).

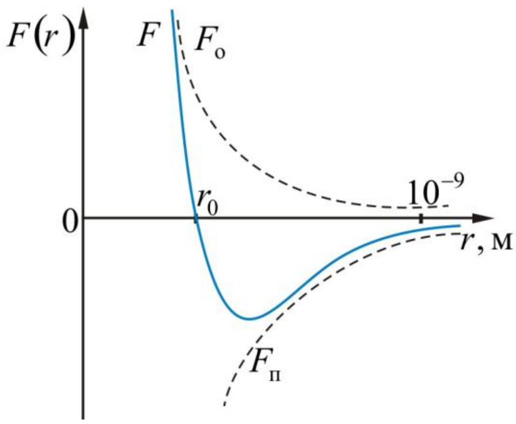


Рис. 3.7.2. Зависимость сил притяжения и сил отталкивания от расстояния

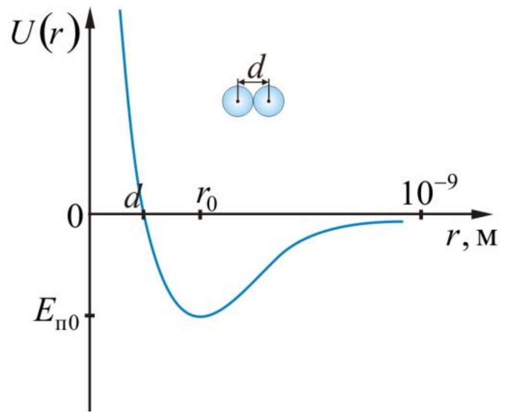


Рис. 3.7.3. Зависимость потенциальной энергии от расстояния

Глубина потенциала равна $E_{\text{п0}} = -a^2/4b$ при $r_0 = (2b/a)^{1/6}$ (расстояние, соответствующее наибольшей энергии связи молекул). Отметим, что в данном потенциале не учтены ориентационные взаимодействия, существенные для многоатомных молекул и кристаллов.

Учитывая совместное действие сил притяжения и сил отталкивания и полученные поправки для объема и давления в уравнении Менделеева–Клапейрона, получим уравнение Ван-дер-Ваальса для реального газа

$$(P + \nu^2 a/V^2)(V - \nu b) = \nu RT \qquad (3.7.3)$$

или для одного моля –

$$\left(P + a/V_m^2\right)\left(V_m - b\right) = RT\,. \qquad (3.7.4)$$

Данное уравнение ***справедливо при условии*** $\nu b << V$ и $\nu^2 a/V^2 << P$. Помимо этого предполагается, что частицы газа сферически симметричны. Поскольку реально это не так, то даже для неплотных газов величины a и b зависят от температуры.

Для плотных газов уравнение Ван-дер-Ваальса как количественное соотношение не годится. Однако качественно оно позволяет описывать поведение газов при высоких давлениях, конденсацию газов и переход газов в критическое состояние.

3.7.3. Изотермы уравнения Ван-дер-Ваальса

Проанализируем изотермы уравнения Ван-дер-Ваальса – зависимости P от V для реального газа при постоянной температуре. Умножив уравнение на V^2 и раскрыв скобки, получим

$$PV^3 - (RT + bP)\,\nu V^2 + a\nu^2 V - ab\nu^3 = 0.$$

Поскольку данное уравнение имеет третью степень относительно V, а коэффициенты при V действительны, то оно имеет либо один, либо три вещественных корня (рис. 3.7.4).

Критическую точку K мы определили как точку перегиба критической изотермы, в которой касательная к изотерме горизонтальна (рис. 3.7.4, 3.7.5).

Полученные из уравнения Ван-дер-Ваальса значения параметров состояния в критической точке:

$$V_к = 3b,\quad P_к = a/\left(27b^2\right),\quad T_к = 8a/\left(27bR\right).$$

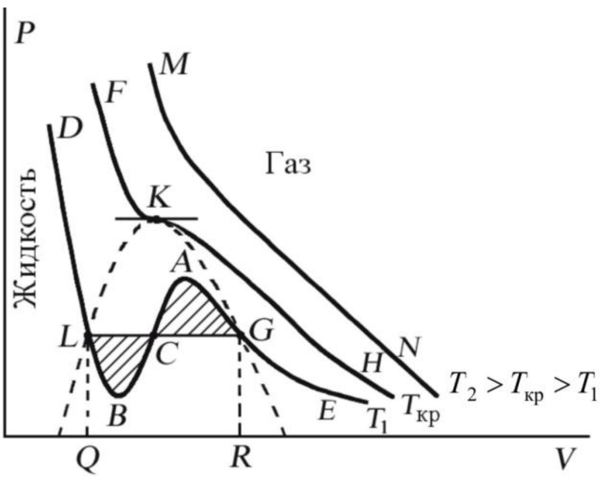


Рис. 3.7.4. Изотермы Ван-дер-Ваальса

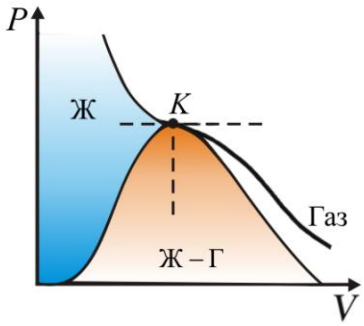


Рис. 3.7.5. Фазовые переходы

Критические параметры некоторых газов приведены в приложении.

При $T > T_{кр}$ вещество находится только в одном, газообразном, состоянии (рис. 3.7.4). При температуре газа ниже критической такая однозначность исчезает, т. е. имеется возможность перехода вещества из газообразного состояния в жидкое и наоборот. Эксперимент показывает, что система переходит из области устойчивых состояний GE (газ) в область устойчивых состояний LD (жидкость) через двухфазное состояние (газ – жидкость) GL вдоль горизонтальной изотермы GCL.

На рис. 3.7.5 показаны области равновесных состояний вещества:

«Ж – Г» – область двухфазных состояний: жидкость – газ.

«Ж» – области жидких состояний, «Г» – газообразное состояние.

3.7.4. Внутренняя энергия газа Ван-дер-Ваальса

Энергия одного моля газа Ван-дер-Ваальса слагается из внутренней энергии молекул, составляющих газ: кинетической энергии теплового движения центра масс молекул, равной $\int_0^T C_V \mathrm{d}T$, и потенциальной энергии взаимного притяжения молекул.

Потенциальная энергия притяжения молекул равна работе, необходимой для разведения молекул на бесконечное расстояние друг от друга. В этом конечном состоянии молекулы не взаимодействуют друг с другом, а потенциальную энергию можно считать равной нулю. Дополнительное давление газа Ван-дер-Ваальса за счет взаимного притяжения молекул равно a/V_m^2, и, следовательно, потенциальная энергия взаимодействия равна

$$E_\text{п} = \int_\infty^{V_m} \left(a/V_m^2\right) \mathrm{d}V_m = -a/V_m .$$

Знак «минус» указывает на то, что между молекулами действуют силы притяжения; V_m – молярный объем, $V_m = V/\mu$, $\nu = m/\mu$.

Полная энергия одного моля газа Ван-дер-Ваальса определяется соотношением

$$U_m = \int_0^T C_V \mathrm{d}T - a/V_m.$$

Если C_V не зависит от температуры, то имеем для одного моля

$$U_m = C_V T - a/V_m .$$

Принципиальное значение уравнения Ван-дер-Ваальса:

- уравнение рассматривалось как общий вид уравнения состояния реальных газов, на основе которого было построено много других уравнений;
- с помощью уравнения Ван-дер-Ваальса впервые удалось описать явление перехода газа в жидкость и проанализировать критические явления.

3.7.5. Процесс Джоуля–Томсона. Сжижение газов

Процесс протекания газа по теплоизолированной трубке, в которой имеется пористая перегородка, называется дросселированием газа.

Подобный процесс, но с реальным газом – адиабатное расширение реального газа с совершением внешними силами положительной работы – осуществили английские физики Дж. Джоуль и У. Томсон в 1865 г.

Эффект Джоуля–Томсона состоит в изменении температуры газа в результате медленного протекания газа под действием постоянного перепада давления сквозь дроссель – локальное препятствие газовому потоку – например пористую перегородку на пути потока.

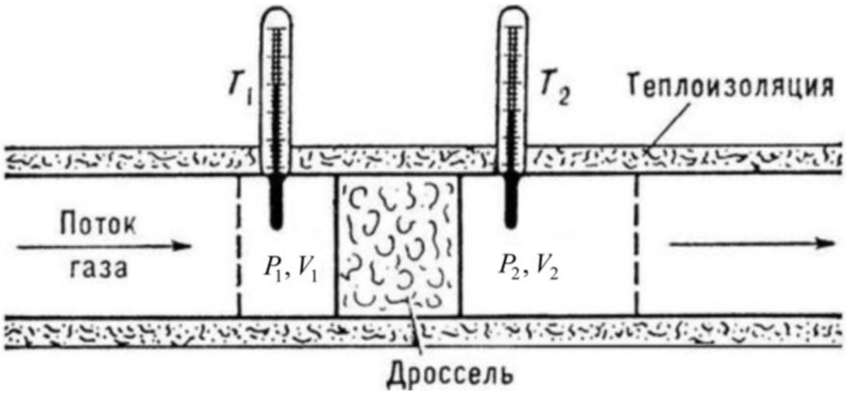


Рис. 3.7.6. Процесс Джоуля–Томсона

Эффект Джоуля–Томсона свидетельствует о наличии в газе сил межмолекулярного взаимодействия.

Газ совершает внешнюю работу – последующие слои газа проталкивают предыдущие, а над самим газом совершают работу силы внешнего давления, обеспечивающие стационарность потока. Работа проталкивания через дроссель порции газа объемом V_1 при давлении P_1 равна P_1V_1, за дросселем эта порция газа занимает объем V_2 и совершает работу P_2V_2.

Эффект Джоуля–Томсона принято называть ***положительным,*** если газ в процессе дросселирования охлаждается $(\Delta T < 0)$, и ***отрицательным***, – если газ нагревается $(\Delta T > 0)$.

В технике низких температур процесс Джоуля–Томсона и адиабатическое расширение газов используются для понижения температуры и сжижения газов.

Сжижение газов

Превращение любого газа в жидкость – сжижение газа – возможно лишь при температуре ниже критической, однако критические температуры очень низкие, например, He – 5,3 K; H_2 – 33 K; N_2 – 126,1 K.

Для достижения столь низких температур используют несколько методов: эффект Джоуля–Томсона, адиабатическое расширение газа с совершением внешней работы, составление охлаждающих смесей.

Схема установки для сжижения газов (машина Линде), в которой используется эффект Джоуля–Томсона, изображена на рис. 3.7.7.

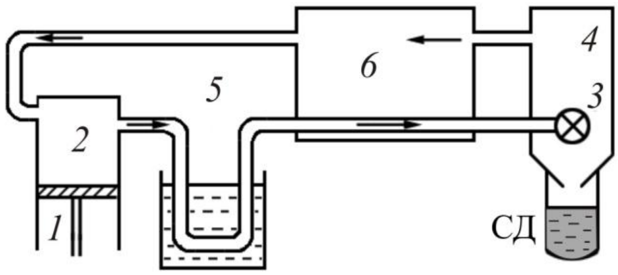


Рис. 3.7.7. Схема установки для сжижения газа (машина Линде)

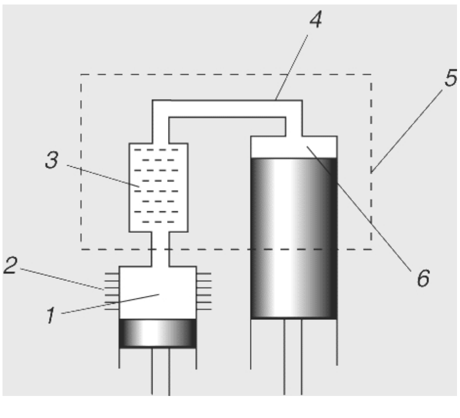
Воздух в компрессоре *1* сжимается до давления в десятки мегапаскалей и охлаждается в холодильнике *5*. Затем сжатый воздух проходит по внутренней трубке теплообменника *6* и пропускается через дроссель *3*. Сжиженный газ поступает в сосуд Дюара (СД).

Второй метод сжижения газов основан на охлаждении газа при совершении им работы.

Сжатый газ, поступая в поршневую машину (***детандер***) (рис. 3.7.8), расширяется и совершает при этом работу по передвижению поршня.

Так как ***работа совершается за счет внутренней энергии газа, то его температура при этом понижается.***

Вариант криорефрижератора, предложенный Дж. Даунтом, схематически изображен на рис. 3.7.8. Компрессор соединен с детандером через регенератор без промежуточных клапанов. Рабочим веществом служит, как правило, газообразный гелий под давлением около 1,5 МПа. Компрессор и детандер работают со сдвигом по фазе на 90°, благодаря чему детандер поддерживает режим чистого охлаждения. В одноступенчатой схеме предельная температура составляет –253 °C (20 К). Каскадная система из устройств подобного типа позволяет достичь еще более низких температур при высоком КПД.



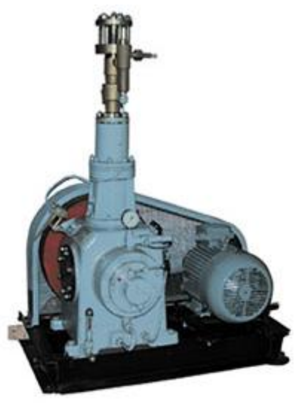


Рис. 3.7.8. Схема одноступенчатого криорефрижератора а и его внешний вид: 1 – цилиндр компрессора; 2 – ребра охлаждения; 3 – регенератор; 4 – холодная головка; 5 – теплоизоляция; 6 – цилиндр детандера

Выводы

Уравнение Клайперона–Менделеева $PV = \nu RT$, полученное в предположении, что молекулы газа не взаимодействуют друг с другом, удовлетворительно описывает состояния реальных газов только при достаточно низких значениях концентрации молекул. При высоких концентрациях и низких температурах наблюдаются определенные расхождения с экспериментально установленными зависимостями. Самое простое и достаточно точно описывающее состояния реальных газов является уравнение Ван-дер-Ваальса.

Уравнение Ван-дер-Ваальса для реального газа учитывает конечный объем молекул νb и их взаимодействие между собой $\nu^2 a/V^2$:

$$\left(P + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT .$$

где a и b – постоянные Ван-дер-Ваальса; V – объем, занимаемый газом; P – давление газа на стенки сосуда.

Внутреннее давление, обусловленное силами взаимодействия молекул:

$$P' = \frac{a}{V_m^2} \quad \text{или} \quad P' = \frac{\nu^2 a}{V^2} .$$

Связь критических параметров – объема, давления и температуры газа – с постоянными a и b Ван-дер-Ваальса определяется соотношениями:

$$V_{m\ \text{кр}} = 3b, \quad P_{\text{кр}} = \frac{a}{27b}, \quad T_{\text{кр}} = \frac{3a}{27Rb}.$$

Внутренняя энергия реального газа, наряду с кинетической энергией хаотического движения частиц $\nu C_V T$, включает и потенциальную энергию их притяжения $\nu a/V_m$.

$$U = \nu\left(C_V T - \frac{a}{V_m}\right),$$

где C_V – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме.

Контрольные вопросы. Упражнения

1. Чем отличаются реальные газы от идеальных?
2. Запишите и проанализируйте уравнение Ван-дер-Ваальса для 1 моль газа; для произвольного количества вещества.

3. Каков смысл поправок при выводе уравнения Ван-дер-Ваальса?

4. Из чего складывается межмолекулярное взаимодействие?

5. Какие силы действуют между молекулами?

6. Какое влияние оказывают сила притяжения на уравнения состояния идеального газа?

7. Проанализируйте изотермы уравнения Ван-дер-Ваальса.

8. Почему перегретая жидкость и пересыщенный пар являются метастабильными состояниями?

9. При адиабатном расширении газа в вакууме его внутренняя энергия не изменяется. Как изменится температура, если газ идеальный? Реальный?

10. Что такое насыщенный пар?

11. Некоторое количество твердого вещества смешано с тем же веществом в жидком состоянии, почему при нагревании этой смеси ее температура не поднимается?

12. Что такое фаза? Фазовый переход?

13. Чем отличается фазовый переход I рода от фазового перехода II рода?

14. Что можно «вычитать» из диаграммы состояния, используемой для изображения фазовых превращений?

15. Каков критерий различных агрегатных состояний вещества?

16. Каково принципиальное значение уравнения Ван-дер-Ваальса?

17. В сосуде вместимостью $V = 0{,}3$ л находится углекислый газ, содержащий количество вещества $\omega = 1$ моль при температуре $T = 300$ К. Определить давление P газа: 1) по уравнению Менделеева–Клапейрона; 2) по уравнению Ван-дер-Ваальса.

18. Критическая температура $T_{кр}$ аргона равна 151 К и критическое давление $P_{кр} = 4{,}86$ МПа. Определить по этим данным критический молярный объем V_{μ} аргона.

19. Определить внутреннюю энергию U азота, содержащее количество вещества $\omega = 1$ моль, при критической температуре $T_{кр} = 126$ К. Вычисления выполнить для четырех значений объемов V: 1) 20 л; 2) 2 л; 3) 0,2 л; 4) $V_{кр}$.

20. Найти внутреннюю энергию U углекислого газа массой $m = 132$ г при нормальном давлении P_0 и температуре $T = 300$ К в двух случаях, когда газ рассматривают: 1) как идеальный; 2) как реальный.

21. Кислород массой $m = 8$ г занимает объем $V = 20$ см^3 при температуре $T = 300$ К. Определить внутреннюю энергию U кислорода.

Новые знания порождают новые вопросы, поскольку они расширяют область нашего соприкосновения с неизвестным.

Рене Декарт

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Одна из важнейших задач курса физики состоит в формировании у студентов представлений о физической картине мира. Окружающие нас тела образуют макромир, основные законы которого были изучены в разделе «Классическая механика». Начав его изучение с кинематики, мы последовательно рассмотрели классические формулировки законов динамики, изложили законы сохранения и их связь с симметрией пространства и времени, рассмотрели теорию тяготения Ньютона и, указав на недостатки классической механики, перешли к современной физике, рассмотрев специальную теорию относительности. В разделе «Молекулярная физика и термодинамика» мы перешли на следующий, молекулярный, уровень изучения явлений, позволивший нам выяснить особенности поведения совокупностей атомов и молекул. Молекулярная физика с ее статистическими методами была первым шагом в микромир – область, которая будет рассмотрена в следующих разделах.

Приведенный перечень разделов, изложенных в первой части физики, позволяет проследить основные периоды ее становления. Со времени выхода в свет труда И. Ньютона «Математические начала натуральной философии» (1678 г.) прошло более трехсот лет. За это время физика прошла путь от макроскопического уровня изучения явлений до исследования материи на уровне элементарных частиц.

Однако, наряду с большими достижениями физики, во всех ее разделах остается масса вопросов. Например, построение квантовой теории тяготения, проблемы физики плазмы и атомного ядра, создание высокоэкономичных и экологически чистых двигателей внутреннего сгорания; разработка альтернативных и долговечных источников энергии; исследование свойств материалов при температурах, близких к 0 К или, наоборот, при 10^9 К и т. д. Решение этих проблем является важнейшим условием ускорения научно-технического прогресса.

Отсюда ясно видна практическая важность фундаментальных физических исследований и особенно исследований в области современной физики. Достижение нового экспериментального и теоретического понимания физических процессов и явлений послужит основой создания новейших технических решений, технологий, приборов и устройств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тюрин Ю.И. Механика. Молекулярная физика. Термодинамика. Часть 1: учеб. пособие для технических университетов / Ю.И. Тюрин, И.П. Чернов, Ю.Ю. Крючков. – Томск: Изд-во Томского ун-та, 2002. – 502 с.
2. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности: учеб. пособие. – 4-е изд., стер. – СПб.: Изд-во «Лань», 2009. – 336 с.
3. Матвеев А.Н. Молекулярная физика: учеб. пособие для студентов вузов. – 3-е изд. – М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Изд-во ”Мир и образование”», 2006. – 360 с.
4. Сивухин Д.В. Общий курс физики. – М.: Наука, 1989. – 591 с.
5. Детлав А.А., Яровский Б.М. Курс физики. – М.: Академия, 2007. – 720 с.
6. Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов. – 14-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательский центр «Академия», 2007. – 560 с.
7. Бондарев Б.В. Курс общей физики. В 3 кн. Кн. 1. Механика: учеб. пособие / Б.В. Бондарев, Н.П. Калашников, Г.Г. Спирин. – 2-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2005. – 352 с.
8. Бондарев Б.В. Курс общей физики. В 3 кн. Кн. 3. Термодинамика. Статистическая физика. Строение вещества: учеб. пособие / Б.В. Бондарев, Н.П. Калашников, Г.Г. Спирин. – 2-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2005. – 366 с.
9. Калашников Н.П. Основы физики. В 2 т.: учебник для вузов / Н.П. Калашников, М.А. Смондырев. – 3-е изд., стер. – М.: Дрофа, 2007.
10. Рогачев Н.М. Курс физики: учеб. пособие. – СПб.: Изд-во «Лань», 2008. – 448 с.
11. Кузнецов С.И. Физические основы механики: учеб. пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2007. – 121 с.
12. Кузнецов С.И. Колебания и волны. Геометрическая и волновая оптика: учеб. пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2007. – 170 с.
13. Кузнецов С.И. Молекулярная физика. Термодинамика: учеб. пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2007. – 113 с.
14. Кузнецов С.И. Краткий курс физики: учебное пособие / С.И. Кузнецов.– Томск: Изд-во ТПУ, 2011. – 187 с.
15. Кузнецов, С.И. Курс физики с примерами решения задач. Молекулярная физика и термодинамика: учебное пособие / С. И. Кузнецов 3-е изд., перераб. и доп. — Томск: Изд-во ТПУ, 2011. — 178 с.: ил.
16. Кузнецов, С.И. Курс физики с примерами решения задач. Основы механики: учебное пособие / С. И. Кузнецов. – 3-е изд., перераб. и доп. – Томск: Изд-во ТПУ, 2011. – 249 с.

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

Механика

1. Кинематика материальной точки

- Уравнение движения материальной точки: $\vec{\mathrm{r}} = \Delta x\vec{\mathrm{i}} + \Delta y\vec{\mathrm{j}} + \Delta z\vec{\mathrm{k}}$.
- Вектор перемещения $\Delta\vec{\mathrm{r}} = \Delta x\vec{\mathrm{i}} + \Delta y\vec{\mathrm{j}} + \Delta z\vec{\mathrm{k}}$.
- Модуль вектора перемещения $\left|\Delta\vec{\mathrm{r}}\right| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.
- Средняя скорость $<\vec{\upsilon}> = \dfrac{\Delta\vec{\mathrm{r}}}{\Delta t}$.
- Мгновенная скорость $\vec{\upsilon} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t} = \upsilon_x\vec{\mathrm{i}} + \upsilon_y\vec{\mathrm{j}} + \upsilon_z\vec{\mathrm{k}}$.
- Модуль скорости $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}$.
- Среднее ускорение $<\vec{a}> = \dfrac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}$.
- Мгновенное ускорение $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathrm{i}}a_x + \vec{\mathrm{j}}a + {}_y\vec{\mathrm{k}}a_z$.
- Модуль ускорения $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.
- Полное ускорение при криволинейном движении $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$.
- Тангенциальная составляющая ускорения $a_\tau = \dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}$.
- Нормальная составляющая ускорения $a_n = \dfrac{\upsilon^2}{r}$.
- Кинетическое уравнение равномерного движения материальной точки вдоль оси x: $x = x_0 + \upsilon t$.
- Уравнения равнопеременного поступательного движения:

$$x = \upsilon_0 t \pm \frac{at^2}{2};\ \upsilon = \upsilon_0 \pm at.$$

- Кинетическое уравнение равномерного вращения: $\varphi = \varphi_0 + \omega t$.
- Угловая скорость $\vec{\omega} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t}$.
- Угловое ускорение $\vec{\varepsilon} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$.
- Период вращения $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

- Частота вращения $\nu = \frac{1}{T}$.
- Циклическая частота вращения $\omega = 2\pi\nu$.
- Уравнения равнопеременного вращательного движения:

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t; \; \varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

- Связь между линейными и угловыми величинами при вращательном движении: $S = R\varphi$; $\upsilon = R\omega$; $a_\tau = R\varepsilon$; $a_n = R\omega^2$.

2. Динамика материальной точки

- Импульс (количество движения) $\vec{\mathrm{p}} = m\vec{\upsilon}$.
- Закон сохранения импульса (для замкнутой системы):

$$\vec{\mathrm{p}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i = \mathrm{const}.$$

- Второй закон Ньютона: $\vec{\mathrm{F}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}$.
- Третий закон Ньютона: $\vec{\mathrm{F}}_{12} = -\vec{\mathrm{F}}_{21}$.
- Центр масс системы материальных точек $\vec{\mathrm{r}}_\mathrm{c} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} r_i m_i$.
- Импульс системы тел $\vec{\mathrm{p}} = m\vec{\upsilon}_\mathrm{c}$.
- Теорема о движении центра масс: $\vec{a}_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} F_{i\ \text{внеш}}$.

3. Силы в механике

- Связь веса тела с силой тяжести и реакцией опоры: $\vec{\mathrm{G}} = m\vec{\mathrm{g}} = -\vec{\mathrm{R}}$.
- Соотношение между весом, силой тяжести и ускорением

$$G = m(g \pm a).$$

- Сила трения скольжения $F_\text{тр} = \mu N$.
- Для тела на наклонной плоскости:

$$F_\text{тр} = \mu mg\cos\alpha; \qquad F = mg\sin\alpha; \qquad a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

- Уравнение Ньютона для неинерциальной системы: $m\vec{a}' = \vec{\mathrm{F}} + \vec{\mathrm{F}}_\text{ин}$.
- Центростремительная сила $F_\text{цс} = ma_\text{цс} = m\frac{\upsilon^2}{R}$.
- Центробежная сила $F_\text{цб} = ma_n = m\omega^2 R$.

- ♦ Сила Кориолиса $\vec{F}_к = 2m[\vec{\upsilon}, \vec{\omega}]$.
- ♦ Закон Гука для пружины: $F_{упр} = -kx$.
- ♦ Связь между силой и потенциальной энергией: $\vec{F} = -\frac{dU}{d\vec{r}}$.
- ♦ Потенциальная энергия упругой пружины $U = \frac{kx^2}{2}$.
- ♦ Работа, совершенная пружиной $A = -\frac{kx^2}{2}$.
- ♦ Напряжение $\sigma = \frac{F_{упр}}{S}$.
- ♦ Приращение длины $\Delta l = \frac{l_0 \sigma}{E}$.
- ♦ Относительное продольное растяжение (сжатие) $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\sigma}{E}$.
- ♦ Относительное поперечное растяжение (сжатие) $\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d_0}$.
- ♦ Коэффициент Пуассона $\mu = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$.
- ♦ Закон Гука для стержня: $\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma$.
- ♦ Модуль Юнга $E = \frac{Fl_0}{S\Delta l}$.
- ♦ Объемная плотность потенциальной энергии $w_0 = \frac{\sigma^2}{2E}$.

4. Энергия. Работа. Законы сохранения

- ♦ Кинетическая энергия $K = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$.
- ♦ Изменение кинетической энергии $\Delta K = A$.
- ♦ Работа переменной силы на участке траектории 1–2 $A = \int_1^2 F \cos\alpha \, dS$.
- ♦ Мгновенная мощность $N = \frac{dA}{dt} = F\upsilon$.
- ♦ Средняя мощность $\langle N \rangle = \frac{A}{\Delta t}$.

- Работа консервативных сил $A = U_1 - U_2$.
- Потенциальная энергия тела при гравитационном взаимодействии $U = mgh$.
- Гравитационное взаимодействие между массами m и M $U = -\gamma \frac{Mm}{r}$.
- Полная механическая энергия системы $E = K + U$.
- Закон сохранения полной механической энергии (для замкнутой системы): $K + U_{\text{внутр}} = E = \text{const}$.
- Скорость шаров массами m_1 и m_2 после абсолютного упругого центрального удара:

$$\upsilon_1' = \frac{(m_1 - m_2)\upsilon_1 + 2m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2} \text{ и } \upsilon_2' = \frac{(m_2 - m_1)\upsilon_2 + 2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}.$$

- Скорость шаров после абсолютного неупругого удара

$$\upsilon = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}.$$

- Закон сохранения импульса при движении ракеты: $m_{\text{р}}\upsilon_{\text{р}} = m_{\text{г}}\upsilon_{\text{г}}$.
- Формула Циолковского $\upsilon_{\text{р}} = -\upsilon_{\text{г}} \ln \frac{M_0}{M}$.

5. Динамика вращательного движения твердого тела

- Момент силы $\vec{\mathrm{M}}_i = [\vec{\mathrm{r}}_i, \vec{\mathrm{F}}_i]$ или $M = Fr\sin\alpha = Fl$.
- Момент импульса относительно точки $\vec{\mathrm{L}} = \left[\vec{\mathrm{r}}, \vec{\mathrm{p}}\right] = \left[\vec{\mathrm{r}}, m\vec{\upsilon}\right]$.
- Основной закон динамики вращательного движения относительно точки: $\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathrm{M}}^{\text{внеш}}$.
- Момент импульса относительно неподвижной оси

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i \upsilon_i r_i = I_z \omega.$$

- Уравнение динамики вращательного движения твердого тела: $M = I\varepsilon$.
- Закон сохранения момента импульса: $\vec{\mathrm{L}} = \text{const}$ или $I\vec{\omega} = \text{const}$.
- Момент инерции системы (тела) $I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ или $I = \int_0^m R^2 \mathrm{d}m$.

- Момент инерции полого и сплошного цилиндров (или диска) относительно оси симметрии $I_{\text{c}} = mR^2$, $I_{\text{c}} = \frac{1}{2}mR^2$.
- Момент инерции шара и сферы $I_{\text{c}} = \frac{2}{5}mR^2$, $I_{\text{c}} = \frac{2}{3}mR^2$.
- Момент инерции тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину $I_{\text{c}} = \frac{1}{12}ml^2$.
- Момент инерции тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец $I_{\text{c}} = \frac{1}{3}ml^2$.
- Теорема Штейнера: $I = I_{\text{c}} + md^2$.
- Кинетическая энергия вращающегося тела $K_{\text{вр}} = \frac{I\omega^2}{2}$.
- Полная кинетическая энергия катящегося тела $K = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$.
- Закон сохранения энергии для тела массы *m*, катящегося с высоты *h*:

$$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

6. Теория тяготения Ньютона. Закон Кеплера

- Закон всемирного тяготения: $F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$ или $\vec{\mathrm{F}} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{\mathrm{r}}}{r}$.
- Потенциальная энергия тела массы *m*, расположенного на расстоянии *r* от большого тела массы *M* $U = -\gamma \frac{Mm}{r}$.
- Напряженность поля тяготения $\vec{\mathrm{G}} = \frac{\vec{\mathrm{F}}}{m}$.
- Потенциал поля тяготения $\varphi = \frac{U}{m} = -\gamma \frac{M}{R}$.
- Связь напряженности поля с потенциалом: $\vec{\mathrm{G}} = -\mathrm{grad}\varphi$.
- Работа по перемещению тела в гравитационном поле

$$A = m\left(\gamma \frac{M}{r_2} - \gamma \frac{M}{r_1}\right) = U_1 - U_2.$$

♦ Потенциальная энергия тела массой *m* на расстоянии *r* от Земли

$$U - U_З = mgR_З^2\left(\frac{1}{R_З} - \frac{1}{r}\right).$$

♦ Полная энергия тела в гравитационном поле

$$E = K + U = \frac{m\upsilon^2}{2} - \gamma\frac{Mm}{r} = \text{const}.$$

7. Законы Кеплера

♦ Второй закон Кеплера: $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \text{const}.$

♦ Третий закон Кеплера: $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3}.$

♦ Первая космическая скорость $\upsilon_1 = \sqrt{gR}$.

♦ Вторая космическая скорость $\upsilon_2 = \sqrt{2gR}$.

8. Специальная теория относительности (СТО)

♦ Преобразования Галилея:

$$x = x' + \upsilon t,\ y = y',\ z = z',\ t = t' \text{ или } \vec{r} = \vec{r}' + \vec{\upsilon}t.$$

♦ Закон сложения скоростей в классической механике: $u = \upsilon' + \upsilon$.

♦ Преобразования Лоренца:

$$x = \frac{x' + \upsilon t}{\sqrt{1-\beta^2}};\ y = y';\ z = z';\ t = \frac{t' + \frac{\upsilon x'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

♦ Интервал времени между событиями $\Delta t' = \frac{\upsilon(x_1 - x_2)}{c^2\sqrt{1-\upsilon/c^2}}.$

♦ Релятивистское (Лоренцево) сокращение длины стержня

$$l = l_0\sqrt{1-\upsilon/c^2}.$$

♦ Релятивистское замедление хода часов $\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}.$

♦ Релятивистский закон сложения скоростей $u = \frac{\upsilon' + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon'\upsilon}{c^2}}.$

- Масса релятивистской частицы $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}$.
- Релятивистское выражение для импульса $\vec{\mathrm{p}} = \dfrac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}$.
- Связь между полной энергией и импульсом релятивистской частицы:
$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}.$$
- Релятивистское выражение для энергии $E = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$.
- Кинетическая энергия релятивистской частицы
$$K = E - E_0 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - 1\right).$$
- Закон взаимосвязи массы и энергии: $E = mc^2 = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}$.
- Энергия покоя $E_0 = mc^2$.
- Взаимосвязь массы и энергии покоя $\Delta E_0 = \Delta mc^2$.
- Масса образовавшейся частицы $M = \dfrac{2m}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} > 2m$.
- Энергия связи $E_{\text{св}} = c^2 \Delta M$.
- Дефект массы $\Delta M = \sum m_i - M$.
- Условие существования черной дыры: $\dfrac{m_\gamma c^2}{2} \le G\dfrac{m_\gamma M}{r_g}$.
- Размеры черной дыры $r_g \le G\dfrac{2M}{c^2}$.

9. Механика жидкостей и газов

- Давление $P = \dfrac{F}{S}$.
- Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости: $S\upsilon = \mathrm{const}$.
- Уравнение Бернулли: $\dfrac{\rho\upsilon^2}{2} + \rho gh + P = \mathrm{const}$.
- Соотношение для гидравлического пресса $\dfrac{F_2}{F_1} = \dfrac{S_2}{S_1}$.

- Закон сообщающихся сосудов: $\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$.
- Архимедова сила $F_A = \rho g V$.
- Формула Торричелли $\upsilon = \sqrt{2gh}$.
- Формула Стокса $F = 6\pi\eta r\upsilon$.
- Формула Пуазейля $V = \pi R^4 \Delta P t/(8\eta l)$.
- Формула Лапласа для произвольной поверхности $\Delta P = \sigma(1/R_1 + 1/R_2)$.
- Формула Лапласа для сферической поверхности $\Delta P = 2\sigma/R$.
- Высота подъема жидкости в капиллярной трубке $h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r}$.
- Поверхностное натяжение $\sigma = \frac{F}{lb}$ или $\sigma = \frac{\Delta E}{\Delta S}$.

Механические колебания и волны

1. Гармонические колебания

- Уравнение гармонического колебания: $x = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$.
- Частота колебаний $\nu = \frac{1}{T}$.
- Циклическая частота $\omega_0 = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$.
- Период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{\nu}$.
- Скорость колебаний $\upsilon_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi)$.
- Ускорение колебаний $a_x = \frac{\mathrm{d}\upsilon_x}{\mathrm{d}t} = -\omega_0{}^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi)$.
- Амплитуда скорости $\upsilon_m = \omega_0 A$.
- Амплитуда ускорения $a_m = \omega_0^2 A$.
- Уравнение движения материальной точки: $F_x = -m\omega_0^2 x$.
- Квазиупругая сила $F_x = -kx$.
- Дифференциальное уравнение динамики гармонических колебаний материальной точки под действием упругих и квазиупругих сил:

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + kx = 0 \text{ или } \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0.$$

- Циклическая частота незатухающих колебаний $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.
- Период незатухающих колебаний $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.
- Потенциальная энергия тела $E_{\text{п}} = \dfrac{kx^2}{2} = \dfrac{1}{2}kA^2\cos(\omega_0 t + \varphi)$.
- Кинетическая энергия тела $E_{\text{к}} = \dfrac{m\upsilon^2}{2} = \dfrac{1}{2}m{\omega_0}^2A^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi)$.
- Полная энергия $E = \dfrac{1}{2}m{\omega_0}^2A^2 = \dfrac{1}{2}kA^2$.
- Уравнение динамики вращательного движения математического маятника: $M = J\varepsilon$.
- Вращающий момент $M = -mgl\sin\alpha$.
- Момент инерции маятника $J = ml^2$.
- Дифференциальное уравнение математического маятника:
$$\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\alpha = 0.$$
- Решение уравнения: $\alpha = \alpha_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$.
- Циклическая частота математического маятника $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$.
- Период колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.
- Циклическая частота физического маятника $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{mgl}{J}}$.
- Период колебаний физического маятника $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l_{\text{пр}}}{g}}$.
- Приведенная длина физического маятника $l_{\text{пр}} = \dfrac{J}{ml}$.

2. Сложение гармонических колебаний

- Уравнения двух когерентных колебаний одного направления:
$$x_1 = A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1) \text{ и } x_2 = A_2\cos(\omega_0 t + \varphi_2).$$
- Результирующая амплитуда $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$.

- Начальная фаза $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}$.
- Модулированные колебания $x = A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$.
- Биения $x = A_б \cos\omega_0 t = 2A\cos\left(\dfrac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\omega_0 t$.
- Амплитуда биений $A_б = 2A\cos\left(\dfrac{\Delta\omega}{2}t\right)$.
- Сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний:

$$\frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1).$$

- Линейно поляризованные колебания $y = \dfrac{A_2}{A_1}x$ или $y = -\dfrac{A_2}{A_1}x$.
- Эллиптически поляризованные колебания $\dfrac{x^2}{A_1^2} + \dfrac{y^2}{A_2^2} = 1$.

3. Влияние внешних сил на колебательные процессы

- Сила трения (сопротивления) $\vec{F}_{тр} = -r\vec{\upsilon}$.
- Второй закон Ньютона для затухающих прямолинейных колебаний:

$$ma_x = -kx - r\upsilon_x.$$

- Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

- Решение уравнения: $x = A_0 \exp(-\beta t)\cos(\omega t + \varphi)$.
- Коэффициент затухания $\beta = \dfrac{r}{2m} = \dfrac{1}{\tau}$.
- Логарифмический декремент затухания $\chi = \ln\dfrac{A(t)}{A(T+t)} = \beta T = \dfrac{1}{N}$.
- Время релаксации $\tau = NT$.
- Частота колебаний $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.
- Условный период затухающих колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$.
- Вынужденные механические колебания $ma_x = -kx - r\upsilon_x + F_x$.

♦ Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний:

$$\frac{d^2x}{dt_2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F_0 \cos\omega t.$$

♦ Уравнение установившихся вынужденных колебаний:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi).$$

♦ Амплитуда вынужденных колебаний $A = \dfrac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 + \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$.

♦ Резонансная частота $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$.

♦ Резонансная амплитуда $A_{\text{рез}} = \dfrac{F_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 + \beta^2}}$.

4. Упругие волны

♦ Длина волны $\lambda = \upsilon T = \dfrac{\upsilon}{v}$.

♦ Волновое уравнение $\nabla^2\xi = \dfrac{1}{\upsilon^2}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$.

♦ Уравнение плоской волны: $\xi = A\cos\omega\left(t - \dfrac{r}{\upsilon}\right)$ или $\xi = A\cos\left(\omega t - kx\right)$.

♦ Волновой вектор $\vec{k} = \dfrac{2\pi}{\lambda}\vec{n}$.

♦ Волновое число $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{\omega}{\upsilon} = \dfrac{2\pi v}{\upsilon} = \dfrac{2\pi}{T}$.

♦ При затухании плоской волны в среде :$\xi = A\exp\left(-\beta t\right)\cos\left(\omega t - kx\right)$.

♦ Уравнение сферической волны:

$$\xi = \frac{A}{r}\cos\omega\left(t - \frac{r}{\upsilon}\right) \text{ или } \xi = \frac{A}{r}\cos\left(\omega t - kr\right).$$

♦ При затухании сферической волны в среде:

$$\xi = \frac{A}{r}\exp\left(-\beta t\right)\cos\left(\omega t - kr\right).$$

♦ Фазовая скорость $\upsilon = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\omega}{k} = \lambda v$.

♦ Групповая скорость $u = \dfrac{d\omega}{dk} = \upsilon + k\dfrac{\partial\upsilon}{\partial k} = \upsilon - \lambda\dfrac{d\upsilon}{d\lambda}$.

- Разность фаз колебаний двух точек среды: $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$.
- Суперпозиция двух волн с близкими частотами

$$\xi = \left[2A_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right)\right]\cos(\omega t - kx).$$

- Уравнение стоячей волны

$$\xi = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cos\omega t \text{ или } \xi = 2A\cos kx\cos\omega t.$$

- Координаты пучностей стоячей волны $x_{\text{пучн}} = \pm\frac{n\lambda}{2}$.
- Координаты узлов стоячей волны $x_{\text{узл}} = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$.
- Фазовая скорость продольных волн в упругой среде:
  - в твердых телах: $\upsilon = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ или $\upsilon = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$;
  - в газах: $\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$ или $\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$.
- Амплитуда звукового давления $P_0 = 2\pi P\rho\upsilon A$.
- Средняя объемная плотность энергии звукового поля

$$< w > = \frac{1}{2}\rho\xi_0^2 = \frac{1}{2}\frac{P_0^2}{\rho\upsilon^2} = \rho\omega^2 A^2.$$

- Энергия звукового поля, заключенного в объемеV: $W = wV$.
- Поток звуковой энергии $\Phi = \frac{W}{t}$.
- Интенсивность звука (плотность потока звуковой энергии)

$$I = \frac{\Phi}{S} = < w > \upsilon.$$

- Связь интенсивности с мощностью звука: $I = \frac{N}{4\pi r^2}$.
- Эффект Доплера для электромагнитных волн в вакууме

$$\nu = \frac{\nu_0\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{1+(\upsilon/c)\cos\theta}.$$

- Продольный оптический эффект Доплера $\nu = \nu_0\sqrt{\frac{1\pm\upsilon/c}{1\mp\upsilon/c}}$.

♦ Поперечный оптический эффект Доплера $\nu = \nu_0 \sqrt{1 - (\upsilon/c)^2}$.

♦ Эффект Доплера в акустике $\nu = \dfrac{(\upsilon \pm \upsilon_{\text{пр}})}{\upsilon \mp \upsilon_{\text{ист}}} \nu_0$.

♦ Закон Хаббла: $\upsilon \cos\theta \approx cz = Hr$.

Молекулярная физика. Термодинамика

1. Молекулярно-кинетическая теория

♦ Молярная масса вещества $\mu = Am_{\text{ед}} N_{\text{А}}$ или $\mu = \dfrac{m}{\nu}$.

♦ Атомная масса $A = \dfrac{m_A}{m_{\text{ед}}}$.

♦ Атомная единица массы $m_{\text{ед}} = \dfrac{1}{12 m_C} 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг.

♦ Число Авогадро $N_A = \dfrac{\mu}{M \cdot m_{\text{ед}}} = 6{,}023 \cdot 10^{26} \dfrac{1}{\text{моль}}$.

♦ Число Лошмидта $N_L = \dfrac{P_0}{kT_0} = 2{,}68 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

♦ Концентрация частиц $n = \dfrac{N}{V}$.

♦ Универсальная газовая постоянная $R = kN_A = 8{,}31 \dfrac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$.

♦ Нормальные условия: $P_0 = 10^5$ Па; $T_0 = 273$ К.

♦ Давление на поверхность $P = \dfrac{\Delta F}{\Delta S}$.

♦ Давление газа на стенку сосуда $P = \dfrac{F}{S} = \dfrac{1}{3} m_0 \upsilon_x^2$.

♦ Основное уравнение МКТ: $P = \dfrac{2}{3} n < E_k >= nkT = \dfrac{1}{3} n m_0 < \upsilon_{\text{кв}} >^2$.

♦ Абсолютная температура $T = \dfrac{m_0 < \upsilon^2 >}{3k}$.

♦ Объем газа в трубке газового термометра $V = \dfrac{nk}{P_0} T$.

♦ Изохорический процесс. Закон Шарля: $\dfrac{P}{T} = \text{const}$ при V, $m = \text{const}$.

- Уравнение изохорического процесса для температуры по шкале Цельсия: $P = P_0(1 + \alpha t)$.
- Изобарический процесс. Закон Гей-Люссака: $\frac{V}{T} = \text{const}$, при $P,\ m = \text{const}$.
- Изотермический процесс. Закон Бойля–Мариотта: $PV = \text{const}$, при $T,\ m = \text{const}$.
- Адиабатический процесс (изоэнтропийный): $S = \text{const}$, $\Delta S = 0$.
- Политропический процесс: $C = \text{const}$.
- Закон Дальтона: $P_{\text{см}} = P_1 + P_2 + \ldots + P_n$.
- Объединенный газовый закон (закон Клапейрона): $\frac{PV}{T} = \text{const}$.
- Уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева–Клапейрона): $PV = \frac{m}{\mu} RT = \nu RT$; для смеси газов: $PV = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \frac{m_n}{\mu_n}\right) RT$.

2. Распределение газовых молекул по скоростям и энергиям

- Скорость звука в газе $\upsilon_{\text{зв}} = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}$.
- Наиболее вероятная скорость $\upsilon_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$ или $\upsilon_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$.
- Средняя квадратичная скорость $\upsilon_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$ или $\upsilon_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$.
- Средняя арифметическая скорость $\upsilon_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ или $\upsilon_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$.
- Относительная скорость $u = \frac{\upsilon}{\upsilon_{\text{вер}}}$.
- Функция распределения Максвелла

$$f(\upsilon) = \frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\upsilon} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m\upsilon^2}{2kT}\right)\upsilon^2.$$

- Функция распределения Максвелла для относительных скоростей

$$f(u) = \frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}u} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-u^2\right)u^2.$$

♦ Функция распределения Максвелла по импульсам

$$f(p)=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2mkT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right)p^2\mathrm{d}p.$$

♦ Функция распределения молекул по энергиям теплового движения

$$f(K)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}K^{1/2}\exp\left(-\frac{K}{kT}\right).$$

♦ Плотность газа $\rho=\dfrac{P\mu}{RT}$.

♦ Барометрическая формула $P=P_0\exp\left(-\dfrac{\mu gh}{RT}\right)$.

♦ Распределение Больцмана $n=n_0\exp\left(-\dfrac{U}{kT}\right)$.

♦ Закон Максвелла–Больцмана: $\mathrm{d}n=n_0A\exp\left(-\dfrac{E}{kT}\right)$.

3. Элементы физической кинетики

♦ Эффективное сечение молекулы $\sigma=\pi d^2$.

♦ Среднее число столкновения молекулы за 1 с: $\langle\nu\rangle=\sqrt{2}\pi d^2 n\langle\upsilon\rangle$.

♦ Средняя длина свободного пробега молекул

$$\langle\lambda\rangle=\frac{\langle\upsilon\rangle}{\nu}=\frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2P}=\frac{kT}{\sqrt{2}\sigma P}.$$

♦ Коэффициент диффузии $D=\dfrac{1}{3}\lambda\langle\upsilon\rangle$.

♦ Уравнение Фика для диффузии: $J=-D\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}$ или $J=-D\,\mathrm{grad}\,n$.

♦ Динамическая вязкость $\eta=\dfrac{1}{3}\lambda\langle\upsilon\rangle nm$ или $\eta=D\rho$.

♦ Уравнение Ньютона для внутреннего трения (вязкости):

$$f_{\text{òð}}=-\eta\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}x}\ \text{или}\ f_{\text{тр}}=-\eta\,\mathrm{grad}\,\vec{\upsilon}.$$

♦ Средняя энергия молекулы $K=\dfrac{m\langle\upsilon\rangle^2}{2}=\dfrac{i}{2}kT$.

♦ Уравнение Фурье для теплопроводности: $q=-\chi\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}=-\chi\,\mathrm{grad}\,T$.

♦ Коэффициент теплопроводности

$$\chi=\frac{1}{3}\lambda\langle\upsilon_T\rangle n\frac{i}{2}k=\frac{1}{3}\lambda\langle\upsilon_T\rangle\rho C_{V\,\text{уд}}=D\rho C_{\text{уд}}.$$

4. Первое начало термодинамики. Внутренняя энергия. Работа и теплота

- Первое начало термодинамики: $\delta Q = \mathrm{d}U + \delta A$.
- Внутренняя энергия одного моля идеального газа равна: $U = \frac{3}{2}RT$.
- Внутренняя энергия произвольной массы газа $U = \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT = \nu\frac{i}{2}RT$.
- Удельная теплоемкость $C_{\text{уд}} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}$.
- Молярная теплоемкость $C_{\mu} = C_{\text{уд}}\mu$.
- Молярная теплоемкость газа при постоянном объеме $C_V = \frac{i}{2}R$.
- Молярная теплоемкость газа при постоянном давлении $C_p = \frac{i+2}{2}R$.
- Уравнение Майера: $C_P = C_V + R$.
- Коэффициент Пуассона $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{i+2}{i}$.
- Внутренняя энергия одноатомного газа $U = \frac{m}{\mu}\frac{R}{\gamma - 1}T = \frac{PV}{\gamma - 1}$.
- Закон Больцмана о равномерном распределении энергии: $\langle K \rangle = \frac{i}{2}kT$.
- Работа газа при изменении его объема $\delta A = p\mathrm{d}V$.
- Количество теплоты, сообщенное в изохорическом процессе
$$Q = C_V(T_2 - T_1).$$
- Изменение внутренней энергии в изохорическом процессе $\mathrm{d}U = \delta Q$.
- Теплоемкость и изохорическом процессе $C_V = \frac{m}{\mu}\frac{R}{\gamma - 1} = \frac{i}{2}R$.
- Работы в изобарическом процессе $A = P(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu}R(T_2 - T_1)$.
- Количество теплоты, сообщенное в изобарическом процессе
$$Q = C_P(T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu}R\Delta T\left(\frac{i}{2} + 1\right).$$
- Изменение внутренней энергии в изобарическом процессе
$$\Delta U = C_V(T_2 - T_1) = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T.$$

♦ Теплоемкость в изобарическом процессе $C_P = \frac{m}{\mu}\frac{\gamma R}{\gamma - 1} = \frac{m}{\mu}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}$.

♦ Работа газа при изобарном расширении

$$A = p(V_2 - V_1) = \frac{m}{M}R(T_2 - T_1).$$

♦ Работа газа в изотермическом процессе

$$A = Q = \frac{m}{\mu}RT\ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu}RT\ln\frac{P_1}{P_2}.$$

♦ Уравнение адиабатического процесса (уравнение Пуассона):

$$PV^{\gamma} = \mathrm{const},\ TV^{\gamma-1} = \mathrm{const},\ T^{\gamma}P^{1-\gamma} = \mathrm{const}.$$

♦ Работа газа при адиабатическом расширении

$$A = -\Delta U = \frac{m}{\mu}C_V(T_1 - T_2).$$

5. Круговые процессы. Тепловые машины

♦ Термический КПД для кругового процесса $\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$.

♦ Термический КПД цикла Карно $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$.

♦ Термический КПД необратимого цикла $\eta_{\text{необр}} = 1 - \frac{T_2 - \Delta T}{T_1 - \Delta T}$.

♦ Работа тепловой машины $A = Q_1 - Q_2$.

♦ Изотермическое расширение цикла Карно $A_1 = Q_1 = \frac{m}{\mu}RT_1\ln\frac{V_1}{V_2}$.

♦ Адиабатическое расширение цикла Карно $A_2 = \frac{R}{\gamma - 1}(T_1 - T_2)$.

♦ Изотермическое сжатие цикла Карно $A_3 = -Q_3 = -\frac{m}{\mu}RT_2\ln\frac{V_2}{V_1}$.

♦ Адиабатическое сжатие цикла Карно $A_4 = \frac{R}{\gamma - 1}(T_1 - T_2)$.

6. Второе и третье начала термодинамики

- Приведенная теплота $Q' = \dfrac{Q}{T}$.
- Энтропия $\mathrm{d}S = \left(\dfrac{\delta Q}{T}\right)_{\text{обр}}$.
- Равенство Клаузиуса $\Delta S_{\text{обр}} = 0$ или $\oint \dfrac{\delta Q_{\text{обр}}}{T} = 0$ или $T\mathrm{d}S = \delta Q$.
- Неравенство Клаузиуса $\Delta S_{\text{необр}} > 0$, или $\oint \dfrac{\delta Q_{\text{обр}}}{T} > 0$ или $T\mathrm{d}s > \delta Q$.
- Для произвольного процесса: $\mathrm{d}S \geq \dfrac{\delta Q}{T}$.
- Математическое выражение второго начала термодинамики: $\mathrm{d}S \geq 0$.
- Первое и второе начала термодинамики: $T\mathrm{d}S \geq \mathrm{d}E_{\text{п}} + \delta A$.
- Изменение энтропии в изопроцессах:
  - *изохорический процесс*: $\Delta S = \dfrac{m}{\mu} C_V \ln \dfrac{T_2}{T_1}$, т. к $V_1 = V_2$;
  - *изобарический процесс*: $\Delta S = \dfrac{m}{\mu} \int\limits_{T_1}^{T_2} C_P \dfrac{\mathrm{d}T_2}{T_1} = \dfrac{m}{\mu} C_P \ln \dfrac{T_2}{T_1}$, т.к. $P_1 = P_2$;
  - *изотермический процесс*: $\Delta S = \dfrac{m}{\mu} R \ln \dfrac{V_2}{V_1}$, т.к. $T_1 = T_2$;
  - *адиабатический процесс*: $\Delta S = 0$, т. к. $\delta Q = 0$.
- Количество теплоты $Q = Cm(T_2 - T_1)$.
- Процессы изменения агрегатного состояния вещества:
  - *закон плавления и кристаллизации:* $\delta Q = \pm\lambda \mathrm{d}m$;
  - *изменение энтропии* при плавлении и кристаллизации:
    $$\Delta S = \pm\lambda m / T_{\text{пл}};$$
  - *закон испарения и конденсации:* $\delta Q = \pm r\mathrm{d}m$;
  - *изменение энтропии* при испарении и конденсации $\Delta S = \pm rm/T_{\hat{e}}$.
- Внутренняя энергия системы $U = F + TS$.
- Энергетическая потеря в изолированной системе $\Pi = T_{\text{мин}} \Delta S$.
- Статистический смысл энтропии $S = k \ln W$.
- Третье начало термодинамики: $S_{T=0} = k \ln W = 0$.

7. Термодинамические свойства реальных газов

- Уравнение состояние идеального газа: $PV = \nu RT$.
- Уравнение Ван-дер-Ваальса для реального газа:

$$\left(P + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT.$$

- Связь критических параметров:

$$V_x = 3b,\ P_x = a/(27b^2),\ T_x = 8a/(27Rb).$$

- Внутренняя энергия произвольной массы реального газа

$$U=\nu(C_V T - a/V_m).$$

- Энтальпия системы $U_1 + p_1V_1 = U_2 + p_2V_2$.

Истинный джентльмен – это тот,
кто кошку всегда называет кошкой.
Даже если он споткнулся о нее и упал.

ГЛОССАРИЙ

В глоссарии перечислены использованные в пособии термины физики, химии, математики, статистики, которые часто непереводимы напрямую. Их число быстро растет и неконтролируемо «размножается». Даны их выверенные толкования без претензий на истину в абсолютной инстанции.

Абсолютная температура – одно из основных понятий термодинамики, введённое У. Томсоном в 1848 г.; обозначается символом *T*.

Абсолютная температура выражается в Кельвинах (К), отсчитывается от абсолютного нуля температуры и измеряется по Международной практической температурной шкале.

Абсолютный нуль температуры – начало отсчёта абсолютной температуры по термодинамической шкале (шкале Кельвина).

Абсолютный нуль температуры расположен на 273,16 К ниже температуры тройной точки воды (на 273,15 ниже нуля температуры по шкале Цельсия).

Согласно третьему началу термодинамики, при стремлении температуры системы к абсолютному нулю, к нулю стремятся и её энтропия, теплоёмкость, коэффициент теплового расширения.

При абсолютном нуле температуры прекращаются хаотические движения атомов, молекул, электронов, определяющие температуру системы, но остаются их регулярные движения, подчиняющиеся квантовой механике, например нулевые колебания атомов в решётке, с которыми связана нулевая энергия.

Агрегатные состояние вещества – состояния одного и того же вещества в различных интервалах температур и давлений.

Традиционно агрегатными считают газообразное, жидкое и твёрдое состояния, переходы между которыми сопровождаются скачкообразными изменениями свободной энергии вещества, энтропии, плотности и других физических характеристик.

С увеличением температуры газов при фиксированном давлении они переходят в состояние частично, а затем полностью ионизованной плазмы, которую также принято считать агрегатным состоянием.

Адаптация (лат. *adaptio – приспособление)* – приспособление функций и строения системы к условиям существования.

Адроны (греч. *adros* – сильный) – элементарные частицы, участвующие в сильном взаимодействии (барионы и мезоны, включая все резонансы).

Адсорбция (лат. *ad* – на, при и *sorbeo* – поглощаю) – поглощение газов, паров или жидкостей поверхностным слоем твердого тела (адсорбента) или жидкости.

Аккреция (лат. *accretio* – приращение, увеличение) – гравитационный захват вещества и последующее его падение на космическое тело (например, звезду).

Анизотропия (греч. *anisos* – неравный и *tropos* – свойство) – зависимость свойств среды от направления. Она характерна, например, для механических, оптических, магнитных, электрических и других свойств кристаллов.

Аннигиляция (лат. *annihilation* – превращение в ничто, уничтожение) – превращение элементарных частиц и античастиц в другие частицы, число и вид которых определяются законами сохранения (например, при аннигиляции пары электрон–позитрон образуются фотоны).

Античастицы – элементарные частицы, имеющие ту же массу, спин, время жизни и некоторые другие внутренние характеристики, что и их «двойники», но отличающиеся от них знаками электрического заряда и магнитного момента, барионного заряда, странности и др.

А**тмосфера** – внесистемная единица давления. Физическая атмосфера (атм) – единица давления, равная нормальному атмосферному давлению: 1 атм = 760 мм рт. ст.; 1 атм = $1,013250 \cdot 10^5$ Па.

Атомная единица массы – единица массы, равная 1/12 массы изотопа углерода ^{12}C; применяется в атомной и ядерной физике для выражения масс элементарных частиц, атомов, молекул.

Бар – внесистемная единица давления, применявшаяся главным образом в метеорологии: 1 бар = 105 Па = 0,986923 атм.

Биосфера – область распространения жизни на Земле; включает нижнюю часть атмосферы, гидросферу и литосферу, населенные живыми организмами.

Бозе-газ – газ из частиц, подчиняющихся квантовой Бозе – Эйнштейна статистике. Бозе-газом являются, например, ^4He, атомы которого содержат чётное число нуклонов, и газы фотонов (квантов электромагнитного поля) и некоторых квазичастиц, например фононов (элементарных возбуждений кристаллической решётки).

Бозоны – частицы или квазичастицы с целым спином, подчиняющимся статистике Бозе – Эинштейна.

Вакуум – среда, содержащая газ при давлениях, существенно ниже атмосферного. Вакуум характеризуется соотношением средней длины свободного пробега молекул газа и размера, характерного для каждого конкретного процесса или прибора. Таким размером могут быть расстояние между стенками вакуумной камеры, диаметр вакуумного трубопровода, расстояние между электродами электровакуумного прибора и т. п.

Вес тела – сила, с которой любое тело, находящееся в поле сил тяжести (как правило, создаваемое каким-либо небесным телом, например Землёй, Солнцем и т. д.), действует на опору или подвес, которые препятствуют свободному падению тела.

В частном случае, когда опора (подвес) покоится или равномерно и прямолинейно движется относительно инерциальной системы отсчёта, вес тела P по величине и направлению совпадает с силой тяжести mg: $P = mg$, где M – масса тела, g – ускорение свободного падения. Вес и сила тяжести приложены к разным объектам (вес – к опоре или подвесу, сила тяжести – к телу) и имеют различную физическую природу (соответственно, вес – упругую, то есть по существу электромагнитную, а сила тяжести – гравитационную).

Взаимодействие – воздействие тел или частиц друг на друга, приводящее к изменению состояния их движения.

В механике Ньютона взаимное действие тел друг на друга характеризуется силой. Более общей характеристикой взаимодействия является потенциальная энергия. В современной физике утвердилась новая концепция – близкодействия, которая распространена на любые взаимодействия. Согласно этой концепции, взаимодействие между телами осуществляется посредством тех или иных полей, непрерывно распределённых в пространстве. Так, всемирное тяготение осуществляется гравитационным полем.

Внесистемные единицы – единицы физических величин, не входящие ни в одну из существующих систем единиц, а также не входящие в СИ, но допускаемые к применению наравне с единицами этой системы. Внесистемные единицы можно разделить на независимые (определяемые без помощи других единиц, например градус Цельсия) и произвольно выбранные, но выражаемые некоторым числом других единиц (например атмосфера, лошадиная сила, световой год, парсек).

Внутреннее трение – свойство твёрдых тел необратимо превращать в теплоту механическую энергию, сообщённую телу в процессах его деформирования, сопровождающихся нарушением в нём термодинамического равновесия.

Внутреннее трение относится к числу неупругих, или релаксационных, свойств, которые не описываются теорией упругости. Последняя основывается на скрытом допущении о квазистатическом характере (бесконечно малой скорости) упругого деформирования, когда в деформируемом теле не нарушается термодинамическое равновесие.

Внутренняя энергия атома – его основная характеристика. Атом является квантовой системой, его внутренняя энергия квантуется – принимает дискретный (прерывный) ряд значений, соответствующих устойчивым, стационарным состояниям атома, промежуточные значения эта энергия принимать не может.

Время жизни – время, в течение которого вероятность обнаружить систему в данном состоянии уменьшается в *e* раз.

Время жизни характеризует скорость перехода квантово-механической системы из данного во все другие состояния.

Время релаксации – характеристика процесса установления равновесия термодинамического в макроскопической физической системе.

Вселенная – весь существующий материальный мир. Вселенная, изучаемая астрономией, – часть материального мира, которая доступна наблюдениям астрономическими средствами; эту часть Вселенной часто называют Метагалактикой.

Галактики (греч. *galaktikos* – млечный) – гигантские (до сотен млрд звезд) звездные системы; к ним относится и наша Галактика, включающая Солнечную систему. Галактики подразделяются на эллиптические (E), спиральные (S) и неправильные (Ir). Ближайшие к нам галактики – Магеллановы Облака (Ir) и Туманность Андромеды (S).

Галилея принцип относительности – требование независимости законов классической (нерелятивистской) механики от выбора инерциальной системы отсчёта (ИСО), понимаемое как инвариантность уравнений механики относительно преобразований Галилея, т. е. преобразований координат и времени движущейся материальной точки при переходе от одной ИСО к другой.

Газ – агрегатное состояние вещества, в котором составляющие его атомы и молекулы почти свободно и хаотически движутся в промежутках между столкновениями, во время которых происходит резкое изменение характера их движения.

Время столкновения молекул в газе значительно меньше среднего времени их пробега.

В отличие от жидкостей и твёрдых тел, газы не образуют свободной поверхности и равномерно заполняют весь доступный им объём.

Газообразное состояние – самое распространённое состояние вещества Вселенной (межзвёздное вещество, туманности, звёзды, атмосферы планет и т. д.).

По химическим свойствам газы и их смеси весьма разнообразны – от мало активных инертных газов до взрывчатых газовых смесей.

К газам иногда относят не только системы из атомов и молекул, но и системы из других частиц – фотонов, электронов, броуновских частиц, а также плазму.

Объём газа, приходящийся на одну молекулу (удельный объём), значительно сильнее зависит от давления и температуры, чем для жидкостей и твёрдых тел.

Гипотеза – научное предположение, выдвигаемое в форме научных понятий с целью восполнить пробелы эмпирического познания или связать различные эмпирические знания в единое целое либо выдвигаемое для объяснения какого-либо явления, фактов и требующее проверки на опыте и теоретического обоснования, для того чтобы стать достоверной научной теорией.

Гироскоп – быстровращающееся симметричное твёрдое тело, ось вращения (ось симметрии) которого может изменять своё направление в пространстве. Свойствами гироскопа обладают вращающиеся небесные тела, артиллерийские снаряды, роторы турбин, устанавливаемых на судах, винты самолётов и т. п.

Гравитация (лат. *gravitas* – тяжесть) – тяготение, универсальное взаимодействие между любыми видами физической материи.

Гравитон – квант гравитационного поля, имеющий нулевую массу покоя, нулевые электрический заряд и спин (экспериментально пока не обнаружен).

Давление – скалярная величина, характеризующая напряжённое состояние сплошной среды. В случае равновесия произвольной и движения идеальной сред давление равно взятой с обратным знаком величине нормального напряжения на произвольно ориентированной в данной точке площадке.

Средняя величина давления на площадку равна отношению среднего значения действующей перпендикулярно площадке силы к площади этой площадки. Давление, так же как плотность и температура, представляет собой основной макроскопический параметр состояния жидкости и газа.

Детерминизм (лат. *determine* – определяю) – философское учение об объективной закономерности взаимосвязи и причинной обусловленности всех явлений, противостоит индетерминизму, отрицающему всеобщий характер причинности.

Дефекты – устойчивые нарушения правильного расположения атомов или ионов в узлах кристаллической решётки, соответствующего минимуму потенциальной энергии кристалла.

Деформация (лат. *deformation* – искажение) – 1) изменение положения точек твердого тела, при котором меняется расстояние между ними в результате внешнего воздействия; 2) изменение формы, искажение сущности чего-либо (например, деформация социальной структуры).

Деформация пластическая – изменение взаимного расположения множества частиц материальной среды, которое сохраняется при снятии напряжений и сопровождается рассеянием энергии. Величина её зависит не только от значений приложенных сил, но и от предшествующей истории их изменения.

Деформация упругая – изменение взаимного расположения множества частиц материальной среды, которое возникает и исчезает одновременно с нагрузкой и не сопровождается рассеянием энергии.

В кристаллах упругая деформация проявляется в изменении расстояний между узлами и перекосе кристаллической решётки без изменения порядка расположения атомов. Первоначальная конфигурация восстанавливается при снятии нагрузки.

Динамика – раздел механики, посвящённый изучению движения материальных тел под действием приложенных к ним сил. Движения любых материальных тел (кроме микрочастиц), происходящие со скоростями, не близкими к скорости света, изучаются в классической динамике. Движение тел, перемещающихся со скоростями, приближающимися к скорости света, рассматривается в теории относительности.

Дискретный (лат. *discretus* – раздельный) – прерывистый, состоящий из отдельных частей.

Диссипация (лат. *dissipatio* – рассеяние) – улетучивание газов земной атмосферы в межпланетное пространство; диссипация энергии – переход части энергии упорядоченных процессов (кинетической энергии движущегося тела, энергии электрического тока и. т. д.) в энергию неупорядоченных процессов, в конечном итоге – в тепло.

Диссоциация (лат. *dissociation* – разъединение) – распад частицы (молекулы, радикала, иона) на несколько более простых частиц.

Единицы физических величин – конкретные физические величины, которым по определению присвоены числовые значения, равные единице.

Жесткость – способность тела или конструкции сопротивляться образованию деформаций. Если материал подчиняется Гука закону, то характеристикой жесткости являются модули упругости E – при растяжении, сжатии, изгибе и G – при сдвиге.

Закон сохранения момента импульса – физический закон, в соответствии с которым момент импульса замкнутой системы относительно любой неподвижной точки не изменяется со временем. Закон сохранения момента импульса есть проявление изотропности пространства.

Запас прочности – характеристика состояния сооружения или его элемента в отношении сопротивления их разрушению.

Идеальная жидкость – воображаемая жидкость, лишённая вязкости и теплопроводности.

Идеальный газ – теоретическая модель газа, в которой пренебрегают размерами и взаимодействиями частиц газа и учитывают лишь их упругие столкновения. Внутренняя энергия идеального газа определяется лишь кинетической энергией его частиц.

Это первоначальное представление было расширено, в более широком понимании идеальный газ состоит из частиц, представляющих собой упругие сферы или эллипсоиды, у них проявляется атомная структура.

Иерархия (греч. *hieros* – священный и *arche* – власть) – расположение частей или элементов целого в порядке от высшего к низшему.

Изобарический процесс – термодинамический процесс, происходящий в системе при постоянном внешнем давлении. На термодинамической диаграмме изображается изобарой.

Для осуществления изобарического процесса к системе надо подводить (или отводить) теплоту, которая расходуется на работу расширения и изменение внутренней энергии.

Изобарная удельная теплоемкость – теплоемкость 1 кг вещества при постоянном давлении.

Изолированная система – термодинамическая система, находящаяся в состоянии адиабатической изоляции от окружающей среды, что достигается заключением системы в адиабатическую оболочку (например, сосуд Дьюара), которая исключает обмен системы теплотой и веществом с окружающей средой (тепловая и материальная изоляция). Поэтому изолированная система не может поглощать или отдавать теплоту, изменение её внутренней энергии, равно производимой работе.

Изотропность (греч. *tropos* – свойство) – одинаковость свойств объектов (пространства, вещества и др.) по всем направлениям.

Импульс – мера механического движения, представляющая собой векторную величину, равную для материальной точки произведению массы m этой точки на её скорость υ и направленную так же, как вектор скорости. Импульс точки остаётся постоянным только при отсутствии сил. Под действием силы импульс точки изменяется в общем случае и по численной величине и по направлению.

Импульс силы – величина, характеризующая действие, которое оказывает на тело сила за некоторый промежуток времени; равна произведению среднего значения этой силы на время её действия.

Инвариант (франц. *invariant* – неизменяющийся от лат. *invariabilis*) – величина, остающаяся неизменной при тех или иных преобразованиях.

Катализ (греч. *katalysis* – разрушение) – ускорение химической реакции в присутствии веществ-катализаторов, которые взаимодействуют с реагентом, но в реакции не расходуются и не входят в состав конечного продукта.

Кинематика – раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учёта их массы и действующих на них сил. Исходными в кинематике являются понятия пространства и времени.

Корпускула (лат. *corpusculum* – частица) – частица в классической (неквантовой) физике.

Конденсированное состояние вещества – понятие, объединяющее твёрдые тела и жидкости в противопоставлении их газу.

Масса атома – определяется в основном массой его ядра и возрастает пропорционально массовому числу атома, т. е. общему числу протонов и нейтронов – числу нуклонов в ядре (ядро содержит Z протонов и $A–Z$ нейтронов).

Масса электрона ($0{,}91 \cdot 10^{-27}$ г) примерно в 1840 раз меньше массы протона или нейтрона ($1{,}67 \cdot 10^{-24}$ г), поэтому центр тяжести атома практически совпадает с ядром и можно приближённо считать, что в системе координат, связанной с атомом, движутся только электроны, а ядро покоится. Учёт движения ядра относительно общего центра тяжести ядра и электронов приводит в теории атома лишь к малым поправкам.

Молярная теплоемкость – физическая величина, равная отношению теплоемкости вещества к количеству этого вещества.

Молярная теплоемкость – количество теплоты, которое получает или отдает 1 моль вещества при изменении его температуры на 1К.

В зависимости от условий теплопередачи различают:

- молярную изобарную теплоемкость;
- молярную изохорную теплоемкость.

Мезоны – нестабильные элементарные частицы с нулевым или целым спином, принадлежащие к классу адронов.

Момент импульса – мера механического движения тела или системы тел относительно какой-либо точки (центра) или оси. Момент импульса равен векторному произведению импульса тела на плечо этого импульса относительно оси.

Пар – газообразное состояние, в которое переходит вещество в результате испарения, сублимации или кипения.

Обычно пар находится в контакте с конденсированной фазой. Понятия газа и пара почти полностью эквивалентны; к газам относят вещества при температуре выше критической, поэтому при повышении давления газ не переходит в конденсированное состояние.

Процесс конденсации возможен лишь из парообразного состояния, т. е. при температуре ниже критической.

Парциальное давление – часть общего давления, относящаяся к одному из компонентов газовой смеси. Равно давлению, которое он оказывал бы в отсутствие всех других компонентов смеси, т. е. в том случае, когда масса данного компонента, содержащаяся в газовой смеси, одна занимала бы весь объём. Понятие парциального давления применимо только к идеальным газам.

Парсек (сокр. от *параллакс и секунда*) – единица длины, применяемая в астрономии, равна 3,26 световых года ($3{,}09 \cdot 10^{16}$м).

Постоянная Авогадро – число молекул, атомов, ионов и других подобных частиц в одном моле вещества.

Постоянная Авогадро $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ 1/моль.

Поле физическое – пространство, в котором можно обнаружить какие-либо физические воздействия, употребляют термин поле, и в других науках или сферах деятельности: поле чувств, поле восприятия, поле зрения, поле напряжений, поле алгебраическое, например поле комплексных чисел и т. д.

Потенциальная энергия – часть механической энергии тела, зависящая от взаимного расположения его частей во внешнем силовом поле. Изменение потенциальной энергии равно совершенной работе.

Работа – мера действия силы, зависящая от её модуля и направления и от перемещения точки приложения силы. Если сила постоянна по модулю и направлению, а перемещение прямолинейно, то работа определяется равенством $A = F\, s \cos \alpha$, где α – угол между направлениями силы и перемещения.

Размеры атома – определяются размерами его электронной оболочки, не имеющей строго определенных границ, поэтому значения радиуса и объёма атома зависят от способа их экспериментального определения. Линейные размеры атома: 10^{-10} м. Объём: ~10^{-30} $м^3$.

Рациональный (лат. *rationalis* – разумный) – разумный, целесообразный, обоснованный.

Редукционизм – сведение сложного к простому, составного к элементарному.

Сингулярность – область пространства с необычными, предельными свойствами по большинству физических параметров. Согласно модели «Большого взрыва» начало Вселенной произошло из сингулярной области, сингулярности.

Синтез (греч. *synthesis* – соединение, сочетание) – соединение (мысленное или реальное) различных элементов объекта в единое целое.

Спин (англ. *spin* – вращение) – собственный момент импульса микрочастицы, имеющий квантовую природу.

Стратосфера (лат. *stratum* – слой и *сфера*) – слой атмосферы, лежащий над тропосферой от 8…10 км в высоких широтах и от 16…18 км вблизи экватора до 50…55 км; характеризуется повышенным по сравнению с ниже- и вышележащими слоями содержанием озона.

Твердое тело – агрегатное состояние вещества, характеризующееся стабильностью формы и характером теплового движения атомов, которые совершают малые колебания около положений равновесия.

Теплоемкость – свойство материала при нагревании поглощать теплоту, а при охлаждении – отдавать ее. Показателем теплоемкости служит удельная теплоемкость.

Термодинамика – наука о физических свойствах объектов, которые состоят из очень большого числа беспорядочно движущихся частиц, об их различных состояниях и процессах.

Термодинамика равновесных процессов – наука, изучающая свойства термодинамических систем, находящихся в термодинамическом равновесии.

Термодинамическая система – физический объект из очень большого числа частиц (атомов, молекул), которые совершают хаотическое тепловое движение, вследствие чего главной характеристикой ее состояния является температура. Простейшей термодинамической системой является идеальный газ, между частицами которого нет сил взаимодействий. Важнейшим свойством рассматриваемых систем является самопроизвольный переход из различных неравновесных состояний в определенное равновесное состояние.

Термоядерная реакция – реакция слияния (синтеза) легких ядер в более тяжелые, происходящая при температурах выше 10 млн градусов. Играют исключительно высокую роль в звездах, как источник энергии.

Удельный вес – отношение веса тела P к его объёму.

Удельный объём – объем занимаемый единицей массы вещества; величина, обратная плотности.

Удельная теплоемкость – физическая величина, равная отношению теплоемкости вещества к его массе. Удельная теплоемкость – количество теплоты, которое получает или отдает 1 кг вещества при изменении его температуры на 1 К.

В зависимости от условий теплопередачи различают:

- удельную изобарную теплоемкость;
- удельную изохорную теплоемкость.

Унифицировать (лат. *unio* – единство и *facere* –делать) – приводить к единой норме, к единообразию.

Физика – наука, изучающая простейшие и вместе с тем наиболее общие свойства и законы движения окружающих нас объектов материального мира. Вследствие этой общности не существует явлений природы, не имеющих физических свойств или сторон. Понятия физики и её законы лежат в основе всего естествознания.

Флуктуация (лат. – *fluctuatio* – колебание) – случайное отклонение физических величин от их средних значений.

Хаббла закон – пропорциональность скорости удаления внегалактического объекта расстоянию до него.

Химическая связь – межатомное взаимодействие, приводящее к образованию молекул или молекулярных соединений.

Центр инерции – геометрическая точка, положение которой характеризует распределение масс в теле или механической системе.

Центральная сила – приложенная к материальному телу сила, линия действия которой при любом положении тела проходит через некоторую определенную точку, называемую центром силы. Примеры центральных сил – сила тяготения, направленная к центру планеты, кулоновы силы электростатического притяжения или отталкивания точечных зарядов и другие.

Черная дыра – космические объекты, образующиеся при сжатии систем, масса которых превышает величину 2,5 масс Солнца. В таком случае нет сил, которые могли бы удержать вещество от гравитационного коллапса – неограниченного сжатия в бесконечно малый объем.

Черные дыры могут быть образованы при взрывах сверхновых звезд или на начальной стадии эволюции вселенной. В центрах многих галактик предполагается наличие черных дыр с массами в миллионы масс Солнца. Гравитационное поле Черных дыр удерживает, как в ловушке, все излучения, однако можно обнаружить их по излучению газа и пыли, формирующих вокруг таких объектов вращающуюся воронку или диск падения вещества в бездонный колодец.

Эволюция (лат. – *evolutio* – развертывание) – одна из форм движения в природе и обществе – непрерывное. Постепенное количественное изменение, в отличие от революции.

Энтропия – многоаспектное понятие: однозначная термодинамическая функция состояния системы многих частиц, мера вероятности пребывания системы в данном состоянии, мера теплообмена при фазовых переходах в системе. В целом служит критерием направленности самопроизвольных процессов в природе – от состояния с малым значением энтропии к состояниям с большим ее значением.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Значения фундаментальных констант

Гравитационная постоянная	$\gamma = 6{,}6720 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2
Скорость света в вакууме	$c = 2{,}99792458 \cdot 10^8$ м/с
Постоянная Планка	$h = 6{,}626176 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Масса покоя электрона	$m_e = 9{,}109534 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса покоя протона	$m_p = 1{,}6726485 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя нейтрона	$m_n = 1{,}6749543 \cdot 10^{-27}$ кг
Отношение массы протона к массе электрона	$m_p/m_e = 1836{,}15152$
Элементарный заряд	$e^- = 1{,}6021892 \cdot 10^{-19}$ Кл
Ускорение свободного падения на уровне моря и широте 45°	$g = 9{,}80665$ м/с^2
Нормальное атмосферное давление	$P_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Н/м^2
Постоянная Больцмана	$k = 1{,}380662 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Атомная единица массы	1 а. е. м. = $1{,}6605655 \cdot 10^{-27}$ кг
Постоянная Авогадро	$N_A = 6{,}022045 \cdot 1023$ моль$^{-1}$
Постоянная Фарадея	$F = 96{,}48456 \cdot 103$ Кл/моль
Молярная газовая постоянная	$R = 8{,}31441$ Дж/(моль·К)
Молярный объем идеального газа при нормальных условиях	$V_0 = 22{,}41383 \cdot 10 - 3$ м^3/моль
Точка плавления льда	273,15 К

Греческий алфавит

Α α – альфа	Η η – эта	Ν ν – ню	Τ τ – тау
Β β – бета	Θ θ – тэта	Ξ ξ – кси	Υ υ – ипсилон
Γ γ – гамма	Ι ι – йота	Ο ο – омикрон	Φ φ – фи
Δ δ – дельта	Κ ϰ – каппа	Π π – пи	Χ χ – хи
Ε ε – эпсилон	Λ λ – ламбда	Ρ ρ – ро	Ψ ψ – пси
Ζ ζ – дзета	Μ μ – мю	Σ σ – сигма	Ω ω – омега

Удельная теплота парообразования воды при разных температурах

t, °С	0	50	100	200
r, МДж/кг	2,49	2,38	2,26	1,94

Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименований

Множитель	Приставка	Обозначение
1 000 000 000 000 = 10^{12}	тера	Т
1 000 000 000 = 10^{9}	гига	Г
1 000 000 = 10^{6}	мага	М
1 000 = 10^{3}	кило	к
100 = 10^{2}	гекто	г
10 = 10^{1}	дека	да
0,1 = 10^{-1}	деци	д
0,01 = 10^{-2}	санти	с
0,001 = 10^{-3}	милли	м
0,000001 = 10^{-6}	микро	мк
0,000000001 = 10^{-9}	нано	н
0,000000000001 = 10^{-12}	пико	п
0,000000000000001 = 10^{-15}	фемто	ф
0,000000000000000001 = 10^{-18}	атто	а

Скорость звука в различных средах

Среда	t, ºC	υ, м/с	Среда	t, ºC	υ, м/с
Воздух	0	331	Ртуть	20	1451
Азот	0	334	Спирт метиловый	20	1123
Аммиак	0	415	Алюминий	20	5080
Водород	0	1284	Медь	20	3710
Гелий	0	965	Железо	20	5170
Кислород	0	316	Стекло кварцевое	20	5370
Углек. газ	0	259	Дерево ель	0	4800
Ацетон	20	1192	Дерево пробковое	–	430–530
Вода пресная	25	1497	Каучук	–	50

Упругие постоянные. Предел прочности

Материал	Модуль Юнга E, ГПа	Модуль сдвига G, ГПа	Коэффи-циент Пуассона μ	Предел прочности на разрыв σ_m, ГПа	Сжимае-мость β, ГПа$^{-1}$
Алюминий	70	26	0,34	0,10	0,014
Медь	130	40	0,34	0,30	0,007
Сталь	200	81	0,29	0,60	0,006
Стекло	60	30	0,25	0,05	0,025

Астрономические постоянные

Радиус Земли	$6{,}378164 \cdot 10^6$ м
Средняя плотность Земли	$5{,}518 \cdot 10^3$ кг/м^3
Масса Земли	$5{,}976 \cdot 10^{24}$ кг
Радиус Солнца	$6{,}9599 \cdot 10^8$ м
Средняя плотность Солнца	$1{,}41 \cdot 10^3$ кг/м^3
Масса Солнца	$1{,}989 \cdot 10^{30}$ кг
Радиус Луны	$1{,}737 \cdot 10^6$ м
Масса Луны	$7{,}35 \cdot 10^{22}$ кг
Среднее расстояние до Луны	$3{,}844 \cdot 10^8$ м
Среднее расстояние до Солнца (астрономическая единица)	$1{,}49598 \cdot 10^{11}$ м
Период обращения Луны вокруг Земли	27 сут 7 ч 43 мин

Свойства некоторых твердых тел

Вещество	Температура плавления, °C	Удельная теплоемкость, Дж/(кг·К)	Удельная теплота плавления, кДж/кг	Температурный коэффициент линейного расширения, 10^{-5} К$^{-1}$
Алюминий	659	896	322	2,3
Железо	1530	500	272	1,2
Латунь	900	386	–	1,9
Лед	0	2100	335	–
Медь	1100	395	176	1,6
Олово	232	230	58,6	2,7
Платина	1770	117	113	0,89
Свинец	327	126	22,6	2,9
Серебро	960	234	88	1,9

Плотности некоторых веществ

Твердые тела	$\rho \cdot 10^{-3}$	Жидкости	$\rho \cdot 10^{-3}$	Газы	$\rho \cdot 10^{-3}$
Платина	21,5	Ртуть	13,6	Хлор	3,21
Золото	19,3	Вода	1	Кислород	1,43
Вольфрам	18,8	Масло растительное	0,92	Воздух	1,29
Свинец	11,4	Керосин	0,8	Азот	1,25
Серебро	10,5	Спирт этиловый	0,79	Гелий	0,18
Медь	8,9	Эфир этиловый	0,71	Водород	0,09

Удельная теплота парообразования при температуре кипения и нормальном давлении, Дж/г

Азот жидкий	199	Керосин	210–230
Ацетон	524	Кислород жидкий	212
Бензин авиационный	230–315	Ртуть	285
Бензол	394	Сероуглерод	356
Вода	2255	Спирт этиловый	921
Водород жидкий	453	Толуол	364
Гелий жидкий	25	Эфир этиловый	351

Критические параметры и поправки Ван-дер-Ваальса

	P_k, атм	V_k, м^3/кмоль	T_k, К	a, ат·м^6/кмоль^2	b, м^3/кмоль	$R/N_A k$
HCl	86	0,060	324,6	0,922	0,020	0,469
H_2	13,2	0,065	33,2	0,194	0,022	0,813
He	2,34	0,058	5,2	0,035	0,024	0,821
H_2O	225	0,055	647,3	5,65	0,031	0,602
O_2	51,4	0,075	154,3	1,40	0,032	0,768
N_2	34,8	0,090	126,0	1,39	0,039	0,782
CO_2	75	0,096	304,1	3,72	0,043	0,745

Эффективный диаметр молекул, динамическая вязкость и теплопроводность газов при нормальных условиях

Вещество	Эффективный диаметр d, нм	Динамическая вязкость η, мкПа · с	Теплопроводность χ, мВт/(м·К)
Азот	0,38	16,6	24,3
Аргон	0,35	21,5	16,2
Водород	0,28	8,66	16,8
Воздух	–	17,2	24,1
Гелий	0,22	–	–
Кислород	0,36	19,8	24,4
Пары воды	–	8,32	15,8
Хлор	0,45	–	–

Учебное издание

КУЗНЕЦОВ Сергей Иванович

ФИЗИКА

Часть I
Механика. Механические колебания и волны. Молекулярная физика и термодинамика

Учебное пособие

Научный редактор
доктор педагогических наук, профессор
В.В. Ларионов

Выпускающий редактор *Т.С. Савенкова*

Редактор *Е.Л. Тен*

Компьютерная верстка *Д.В. Сотникова*

Дизайн обложки *Т.А. Фатеева*

Подписано к печати 23.03.2012. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл.печ.л. 13,60. Уч.-изд.л. 12,30.
Заказ 316-12. Тираж 100 экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г.Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru